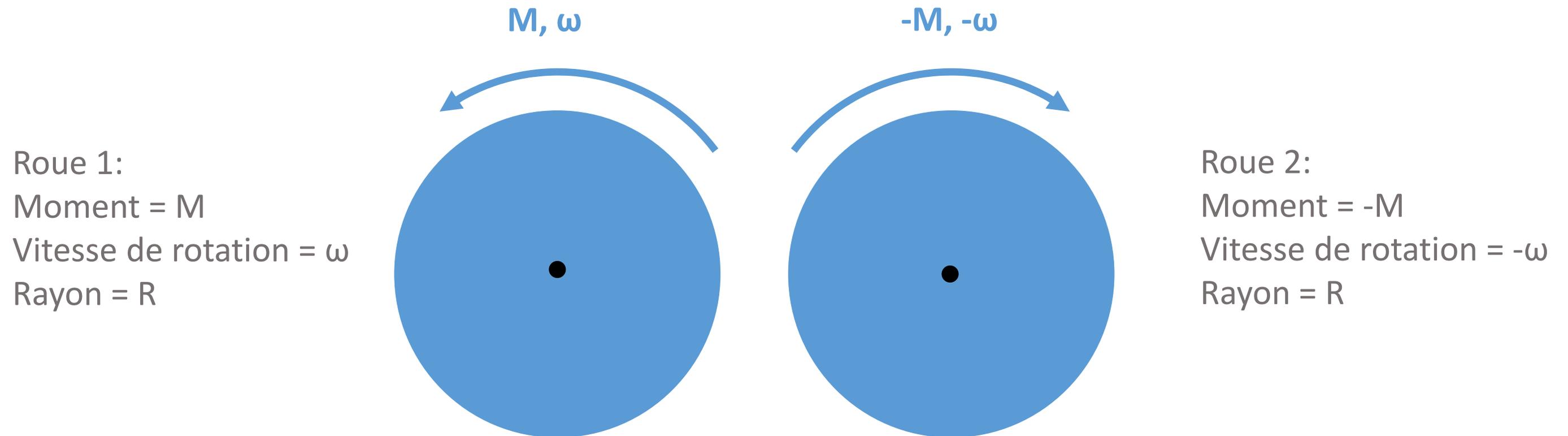


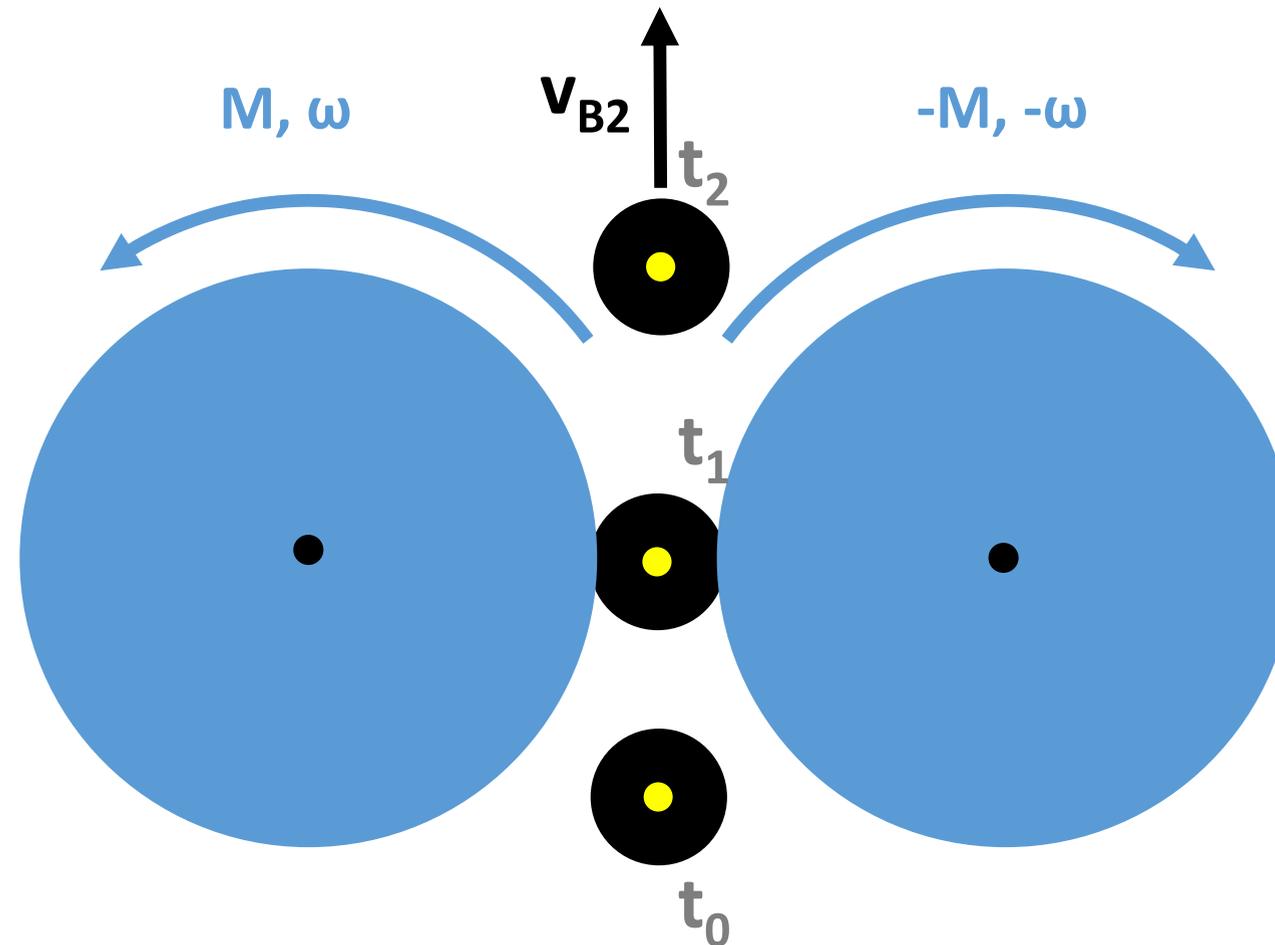
# Mécanismes de Lancer d'une Balle de Squash

Les roues tournent sans résistance autres que les frottements dans le mécanisme.



3 étapes à considérer:

- $t_0$  = étape initiale = la balle est juste avant les 2 roues
- $t_1$  = étape transitoire = la balle est entre les 2 roues
- $t_2$  = étape finale = la balle est après les 2 roues et a été lancée

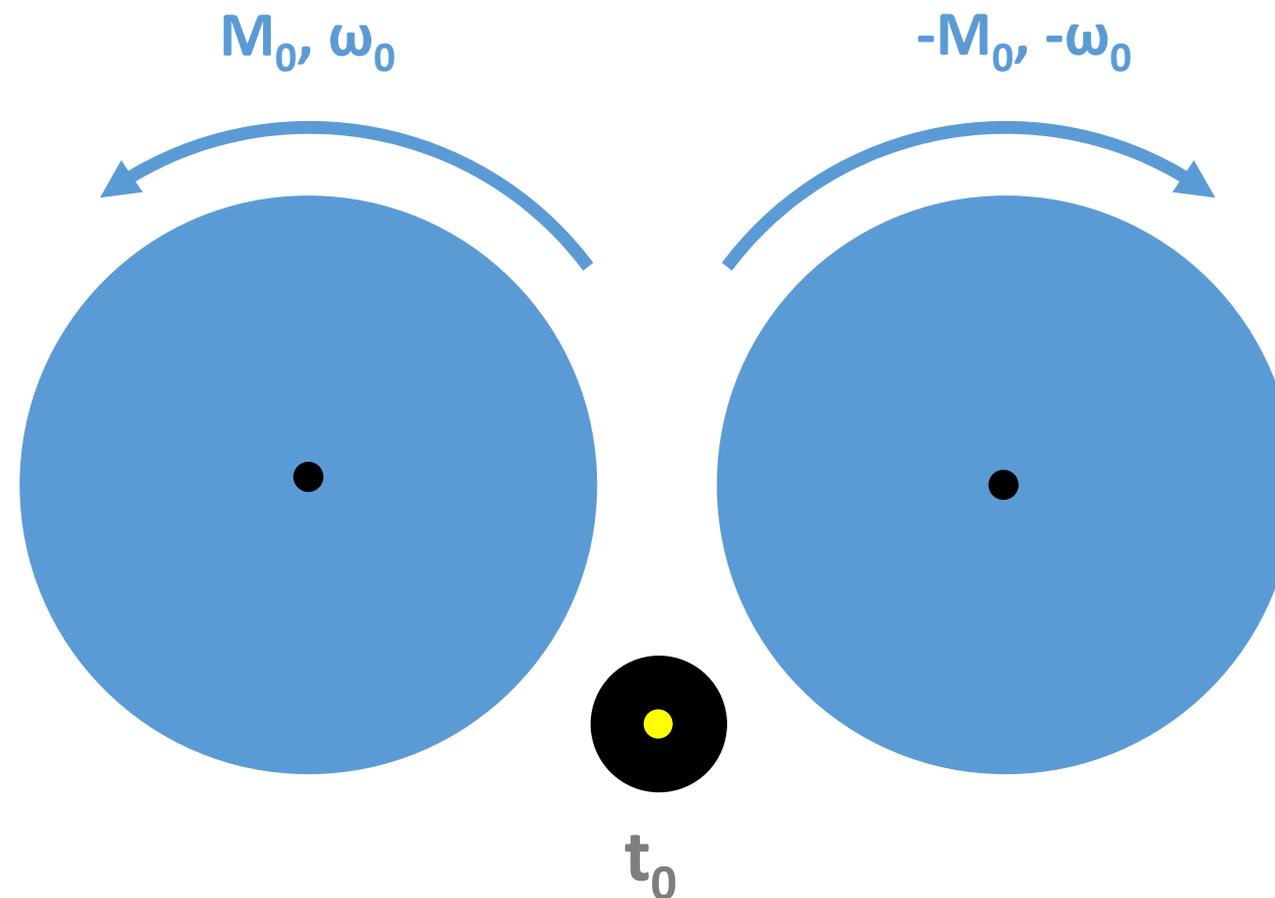


- $t_0$  = étape initiale = la balle est juste avant les 2 roues

Vitesse initiale de la balle :  $v_{B0} \approx 0$  et  $v_{B0} \ll v_{B2}$

Energie cinétique de l'ensemble 2 roues + 1 balle:

$$E_{c0} = E_{c0}(\text{roue 1}) + E_{c0}(\text{roue 2}) = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{roue1}} \cdot \omega_0^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{\text{roue2}} \cdot \omega_0^2$$

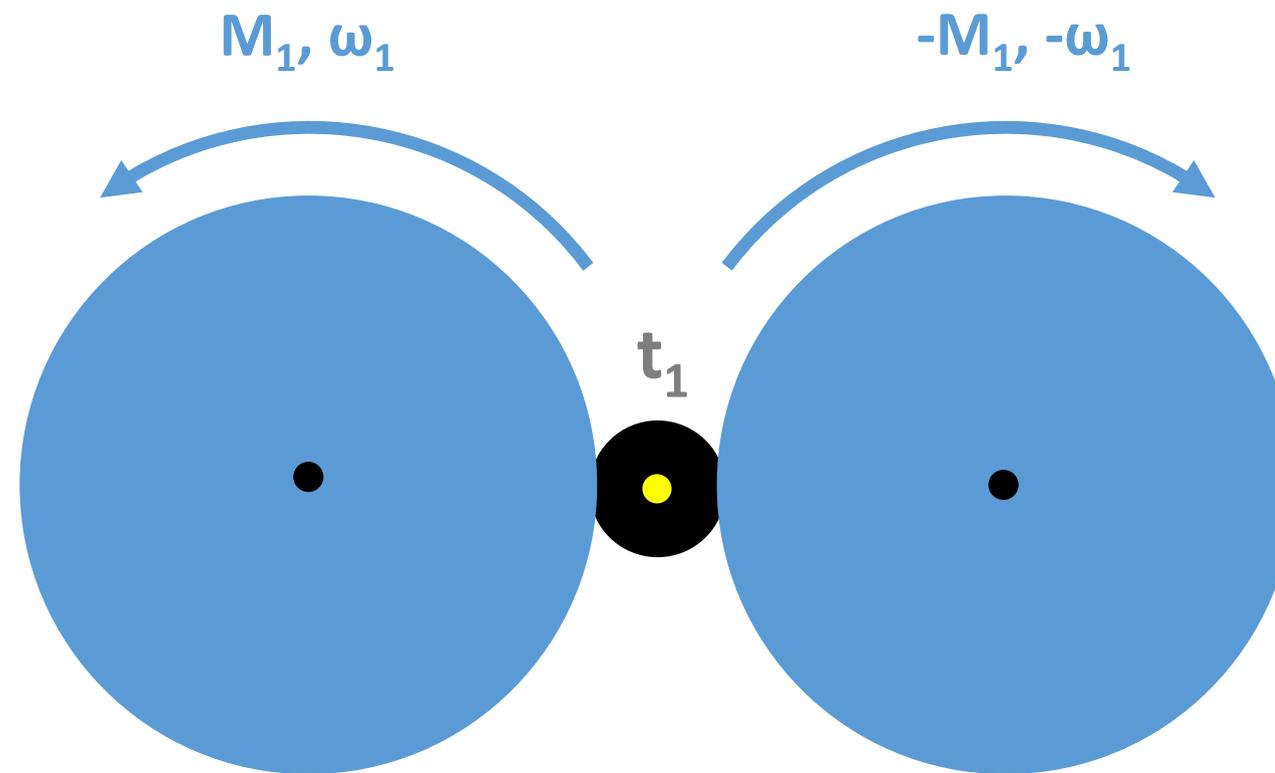


- $t_1$  = étape transitoire = la balle est entre les 2 roues

Vitesse de la balle augmente au contact des roues.

Moments résistants sur les roues dus à l'écrasement de la balle.

Réactions normales de la balle écrasée sur les roues.



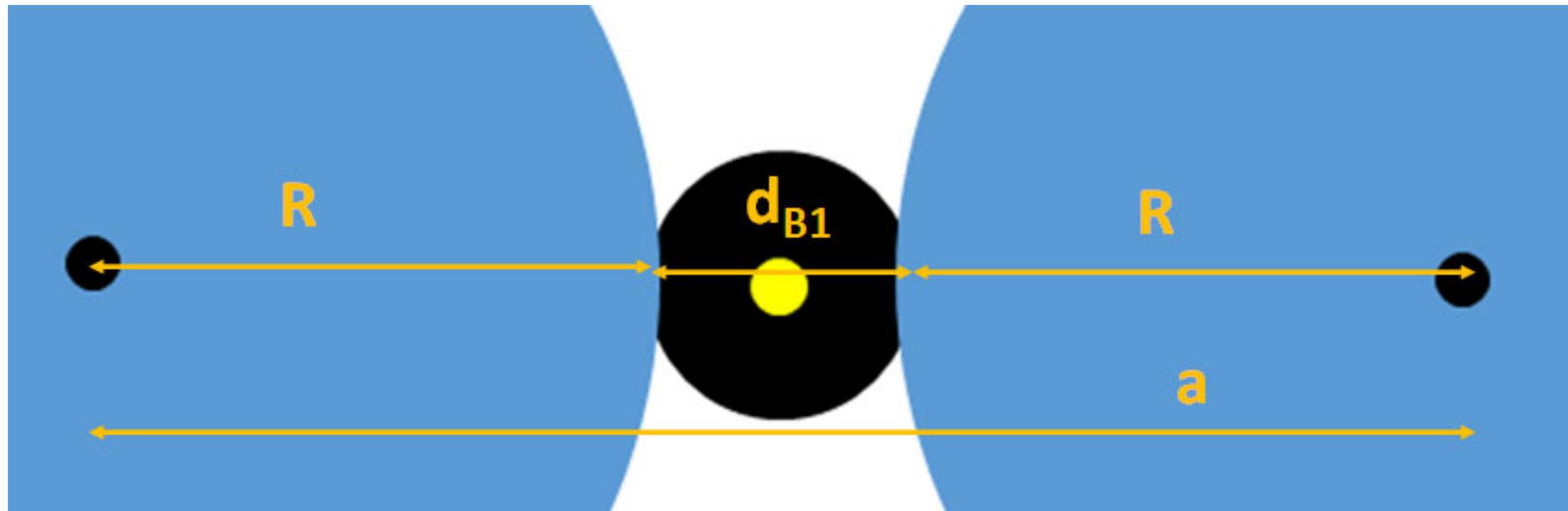
- $t_1$  = étape transitoire = la balle est entre les 2 roues

La vitesse de la balle augmente au contact des roues en roulement sans glissement.

$$v_{B1} = R \cdot \omega_1$$

$v_{B1}$ ,  $\omega_1$ ,  $d_{B1}$  : inconnus et/ou variables

$a$  = entraxe



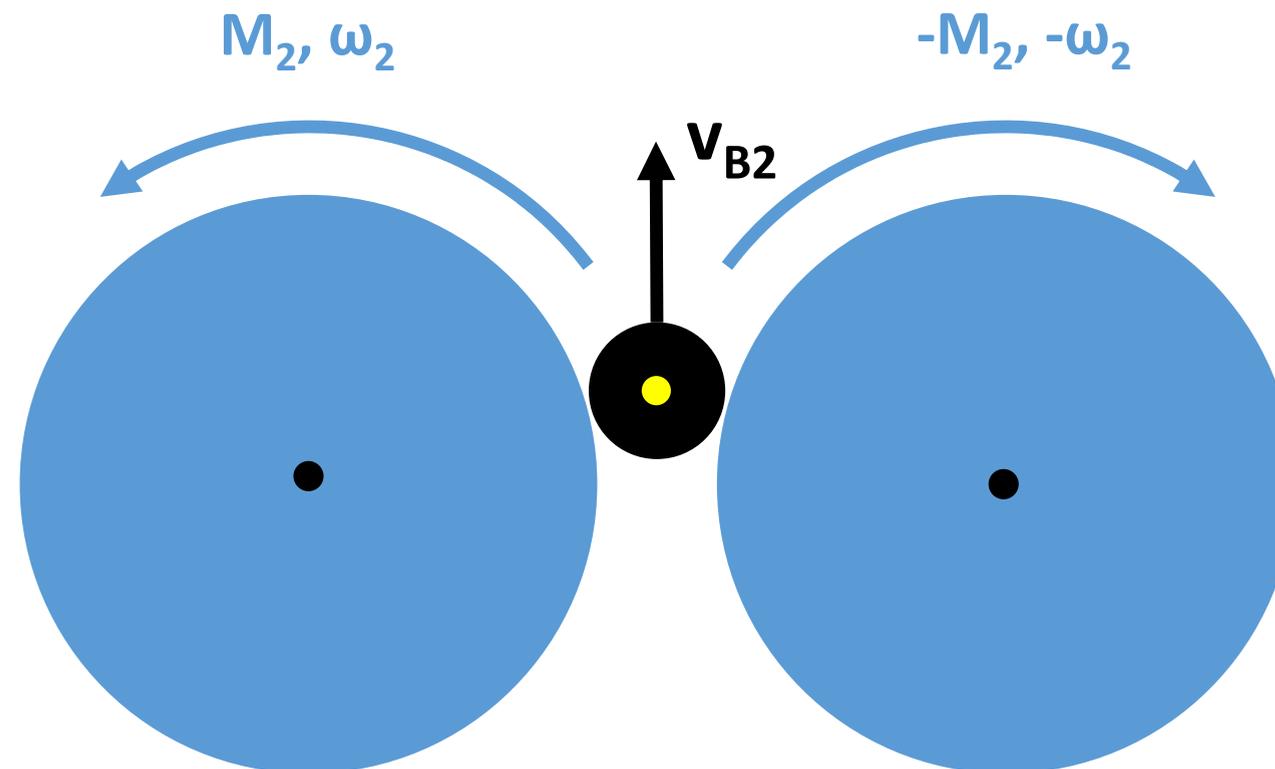
- $t_2$  = la balle a passé les 2 roues et a été lancée

Les roues ont transmis de l'énergie cinétique à la balle.

Vitesse de la balle :  $v_{B2}$

Energie cinétique de l'ensemble 2 roues + 1 balle:

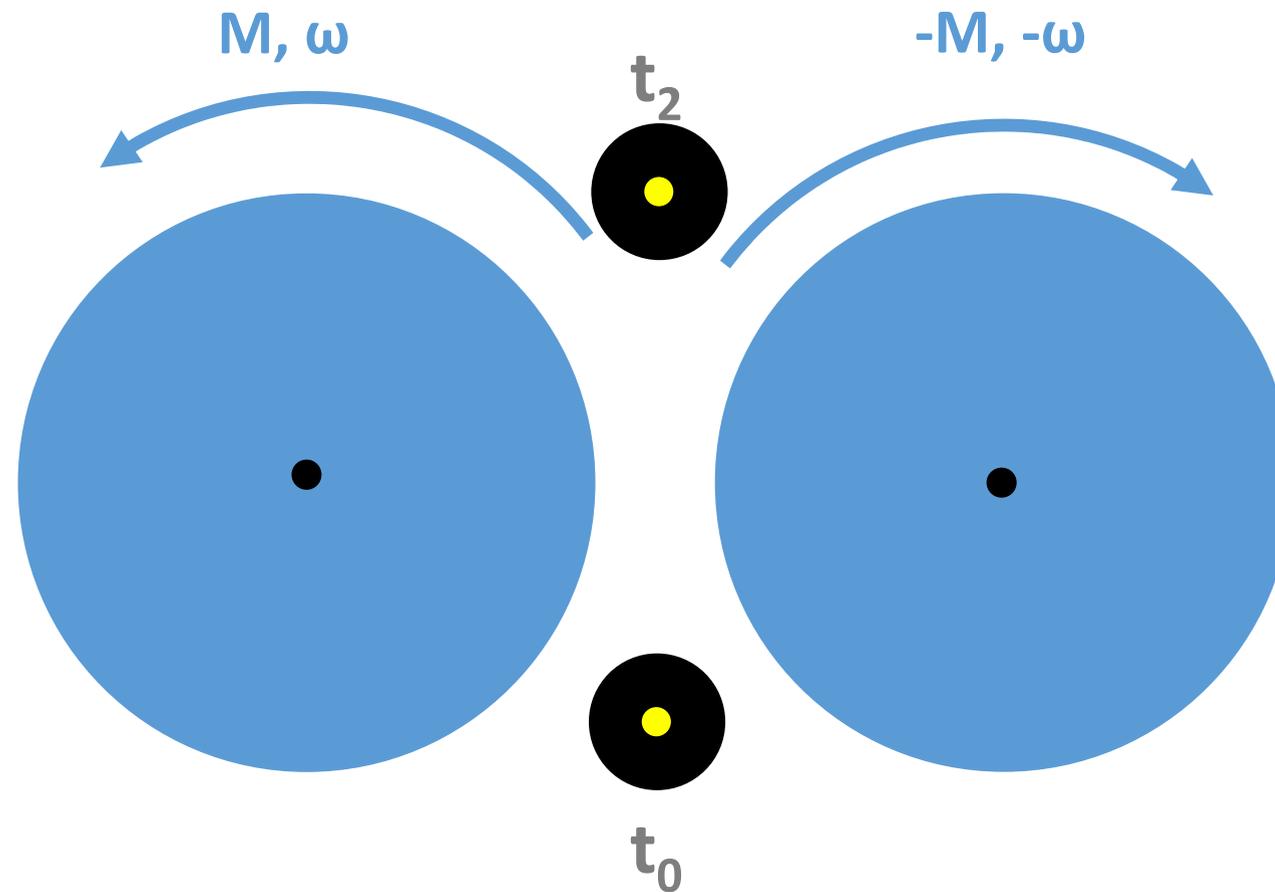
$$E_{C2} = E_{C2}(\text{roue 1}) + E_{C2}(\text{roue 2}) = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{roue1}} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{\text{roue2}} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{B2}^2$$



Conservation de l'énergie du système (2 roues/balle) entre  $t_0$  et  $t_2$ :

$$E_{C0} = E_{C0}(\text{roue 1}) + E_{C0}(\text{roue 2}) = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{roue1}} \cdot \omega_0^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{\text{roue1}} \cdot \omega_0^2 =$$

$$E_{C2} = E_{C2}(\text{roue 1}) + E_{C2}(\text{roue 2}) = \frac{1}{2} \cdot J_{\text{roue1}} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{\text{roue1}} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_{B2}^2$$



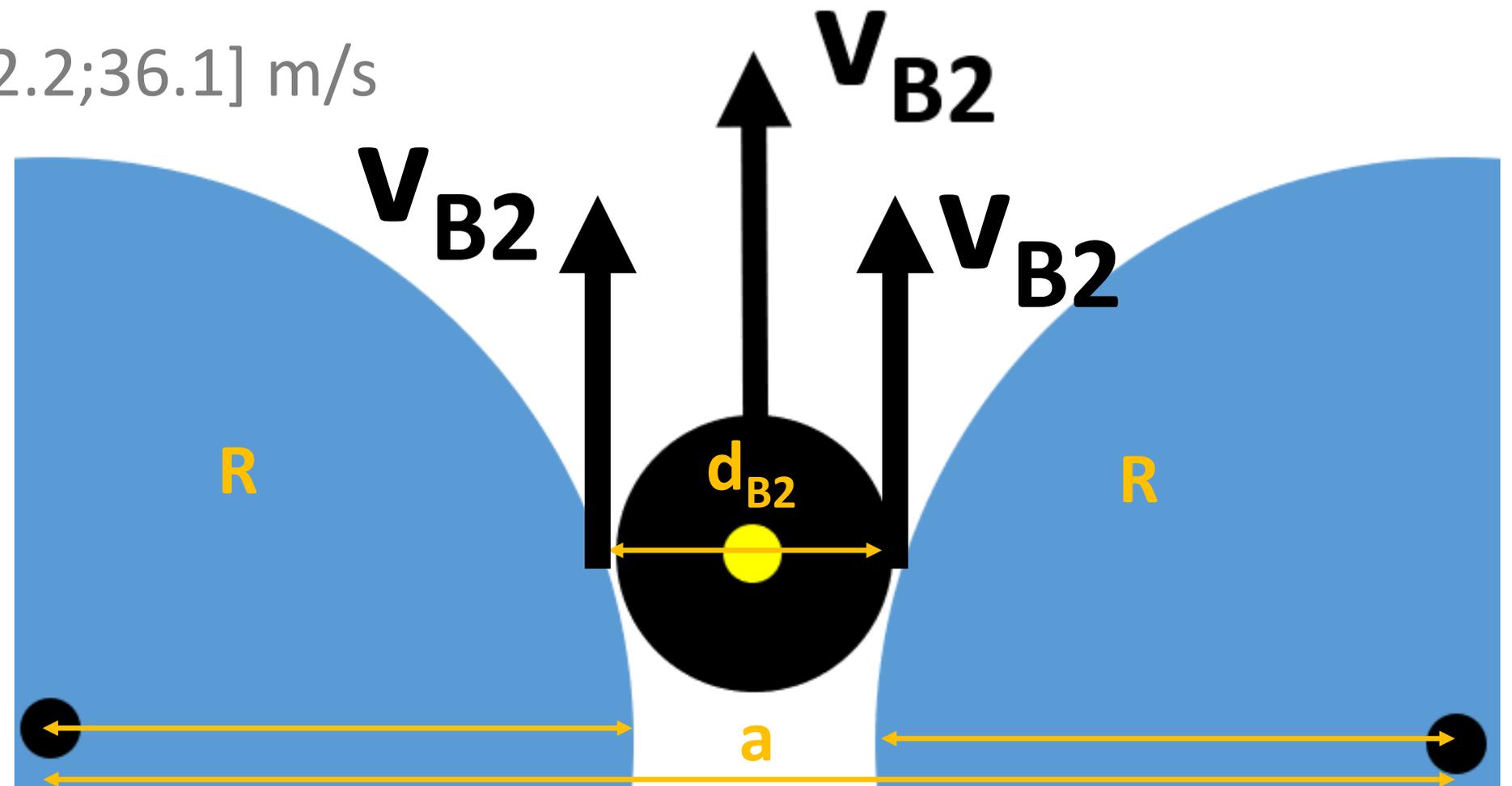
- $t_{2-}$  = la balle est juste lancée.

La vitesse de la balle est fonction de la vitesse de rotation des roues.

$$v_{B2} = R \cdot \omega_2$$

$\omega_2$  : inconnue

$$v_{B2} = [80;130] \text{ km/h} = [22.2;36.1] \text{ m/s}$$



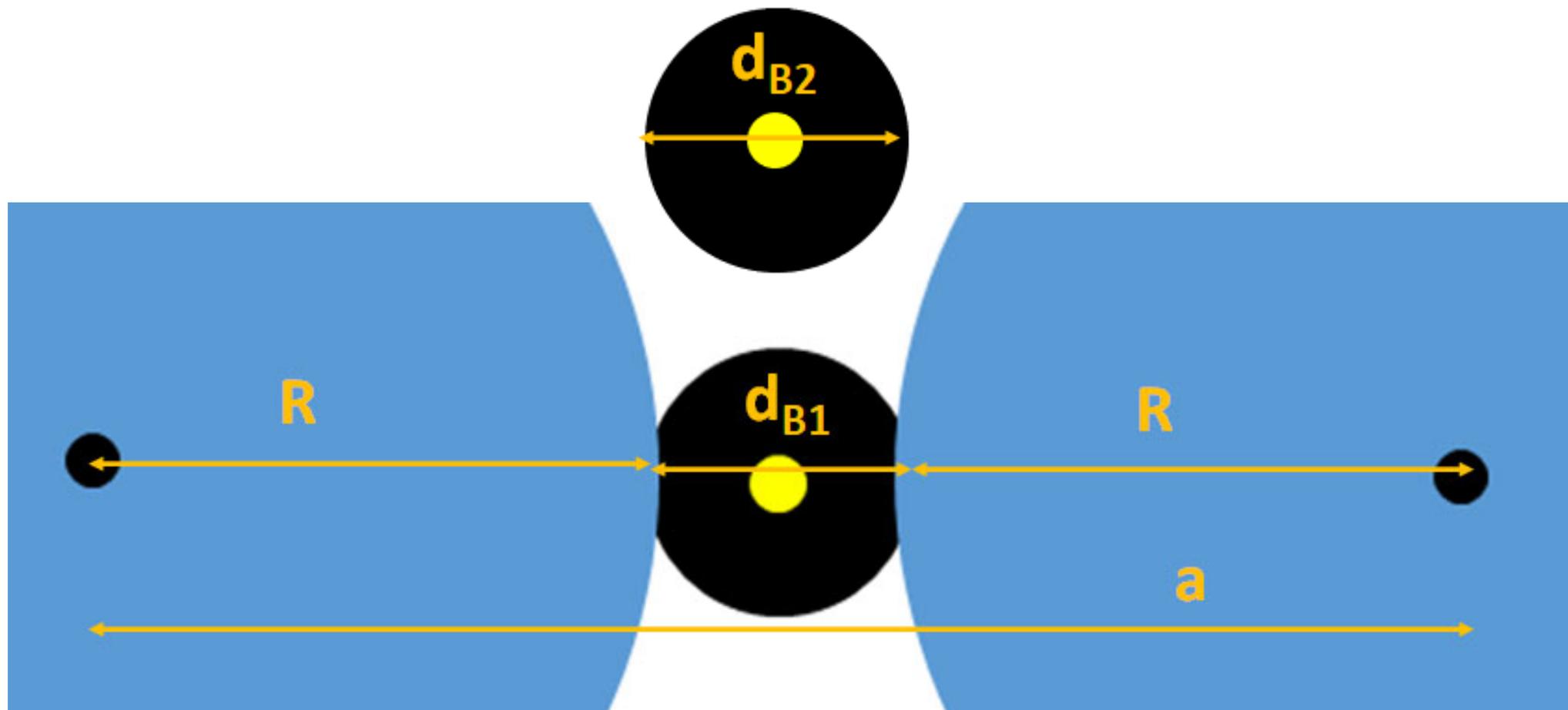
- $t_{2-}$  = la balle est juste lancée.

Hypothèse:

$v_{B2}$  est uniforme dans la balle.  $2R + d_{B1} = a$

$$\omega_2 = v_{B2} / R$$

$$\text{avec } v_{B2} = [22.2; 36.1] \text{ m/s} \quad (1)$$



Conservation de l'énergie du système (2 roues/balle) entre  $t_0$  et  $t_2$ :

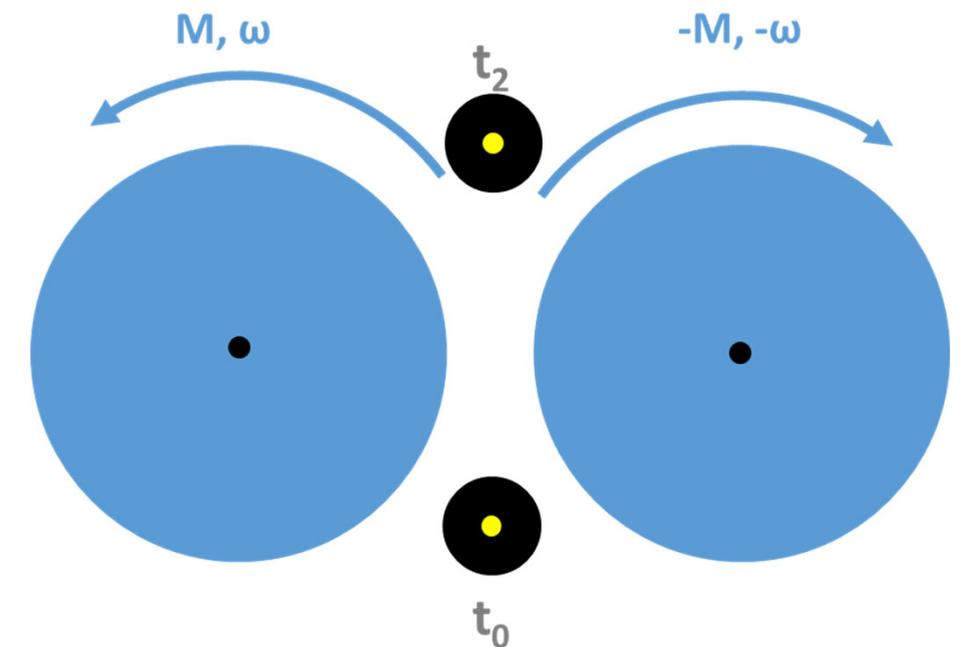
$$E_{C0} = \frac{1}{2} J_{\text{roue1}} \cdot \omega_0^2 + \frac{1}{2} J_{\text{roue2}} \cdot \omega_0^2 = E_{C2} = \frac{1}{2} J_{\text{roue1}} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_{\text{roue2}} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_B \cdot v_{B2}^2$$

Roues 1 et 2 identiques:  $J_{\text{roue1}} = J_{\text{roue2}} = J_{\text{roue}}$

$$J_{\text{roue}} \cdot \omega_0^2 = J_{\text{roue}} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_B \cdot v_{B2}^2$$

Avec  $v_{B2} = R \cdot \omega_2$

$$J_{\text{roue}} \cdot \omega_0^2 = J_{\text{roue}} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_B \cdot \omega_2^2 \cdot R^2 \quad (2)$$



Déterminer  $\omega_0$  en fonction de  $\omega_2$  tq (1) et (2) soient vérifiées.

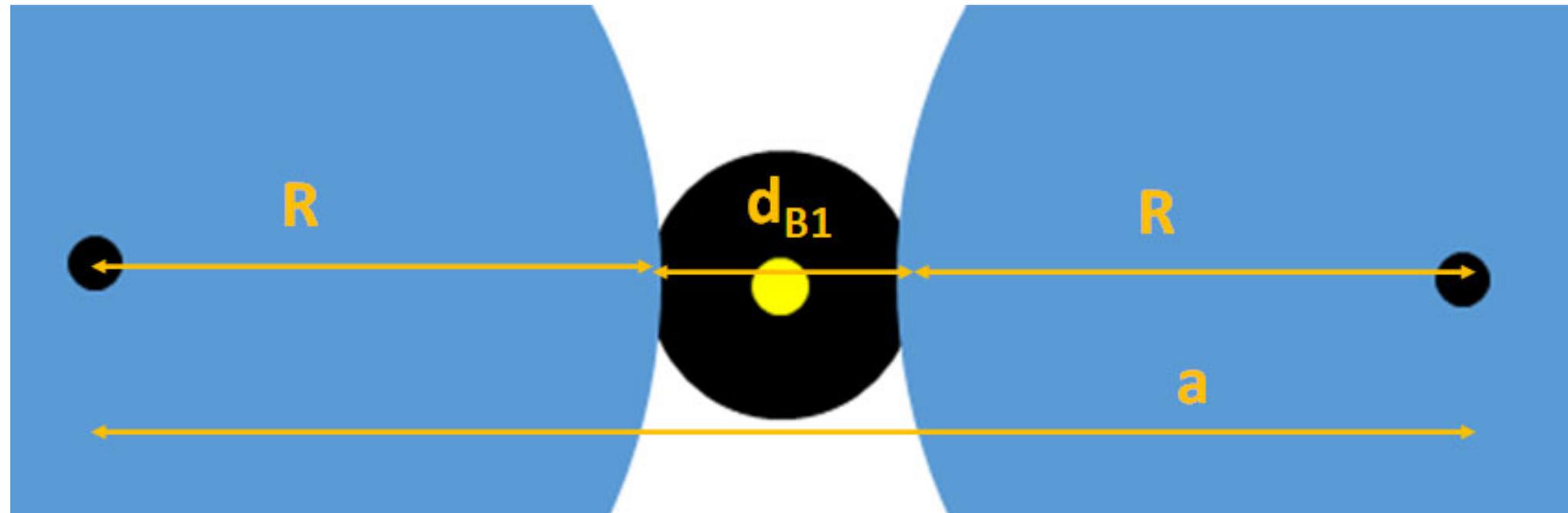
- $t_1$  = étape transitoire – Déformation de la balle

La balle est comprimée entre les 2 roues.

Elle se déplace par adhérence sur les roues.

Diamètre minimum de la balle:  $d_{B1} = a - 2.R$

Déformation de la balle:  $\Delta d = d_B - d_{B1} = d_B - (a - 2.R)$



- $t_1$  = étape transitoire = La balle est comprimée.

## The dynamic behavior of squash balls

Article in American Journal of Physics - March 2011

DOI: 10.1119/1.3531971

Gareth J. Lewis, J. Cris Arnold, and Iwan W. Griffiths

School of Engineering, Swansea University, Singleton Park, Swansea SA2 8PP, United Kingdom

(Received 26 February 2010; accepted 23 September 2010)

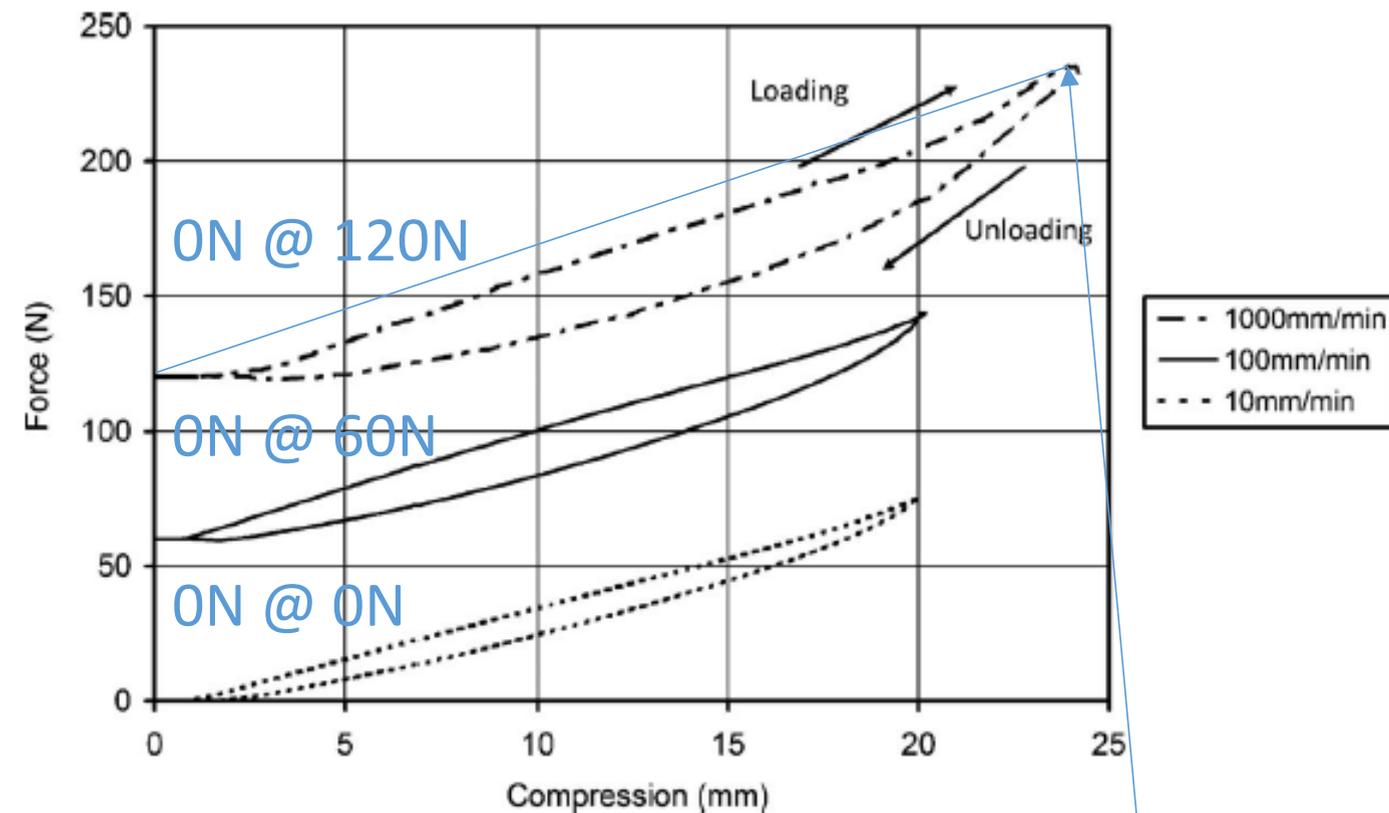


Fig. 3. Force/compression behavior of yellow dot balls at different compression rates.

Typical force/compression curves are shown in Fig. 3 for the double yellow dot ball at various test speeds. The two faster tests shown are offset by 60 and 120 N to show the behavior clearly on one graph. Figure 3 shows that the force/compression behavior is not quite linear, with a slight upward curvature. The force on unloading is smaller, giving a hysteresis loop between loading and unloading. As the test speed increases, the forces increase and the area of the hysteresis loop also increases. Figure 4 shows the force/compression behavior for the double yellow dot balls and the Max blue balls, both at a test speed of 100 mm/min. The data show that the Max blue balls require a slightly higher force to achieve the same compression, not surprising given their larger size. There is little difference in the size of the hysteresis loops.

$$235\text{N} - 120\text{N} = 115\text{N} @ \Delta d = 24\text{mm}$$

- $t_1$  = étape transitoire – Déformation de la balle

Conclusion sur l'étude:

Pas de déformation:  $\Delta d_0 = d_B - d_B = 0.040 - 0.040 = 0\text{m}$   $F_0 = 0\text{N}$

Déformation maximale:  $\Delta d_{\max} = 0.024\text{m}$   $F_{\max} = 115\text{N}$

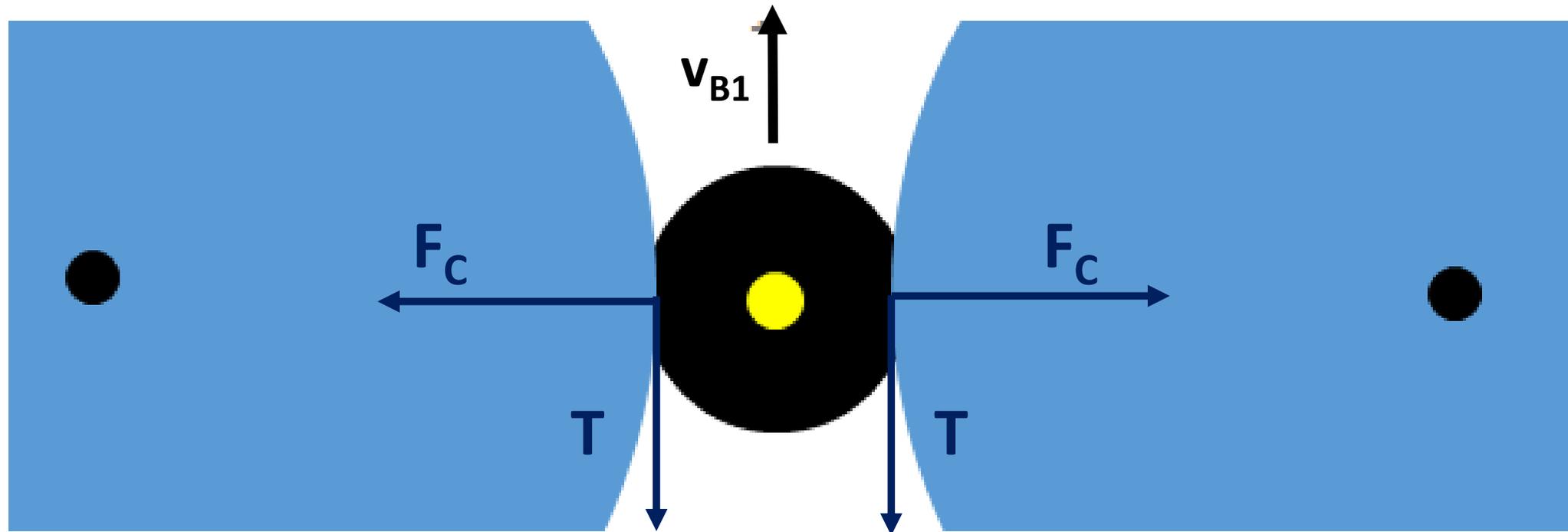
Raideur de la balle:  $K = (F_{\max} - F_0) / (\Delta d_{\max} - \Delta d_0) \approx 4'800 \text{ N/m}$

Force de compression sur la balle en fonction de sa déformation:

$$F_c = K \cdot \Delta d \quad \text{avec} \quad K \approx 4'800 \text{ N/m} \quad (3)$$

- $t_1$  = étape transitoire

Application à notre problématique:



Les forces de frottement s'opposent au mouvement de la roue.  
Loi de Coulomb.

$F_C$  = Force normale appliquée

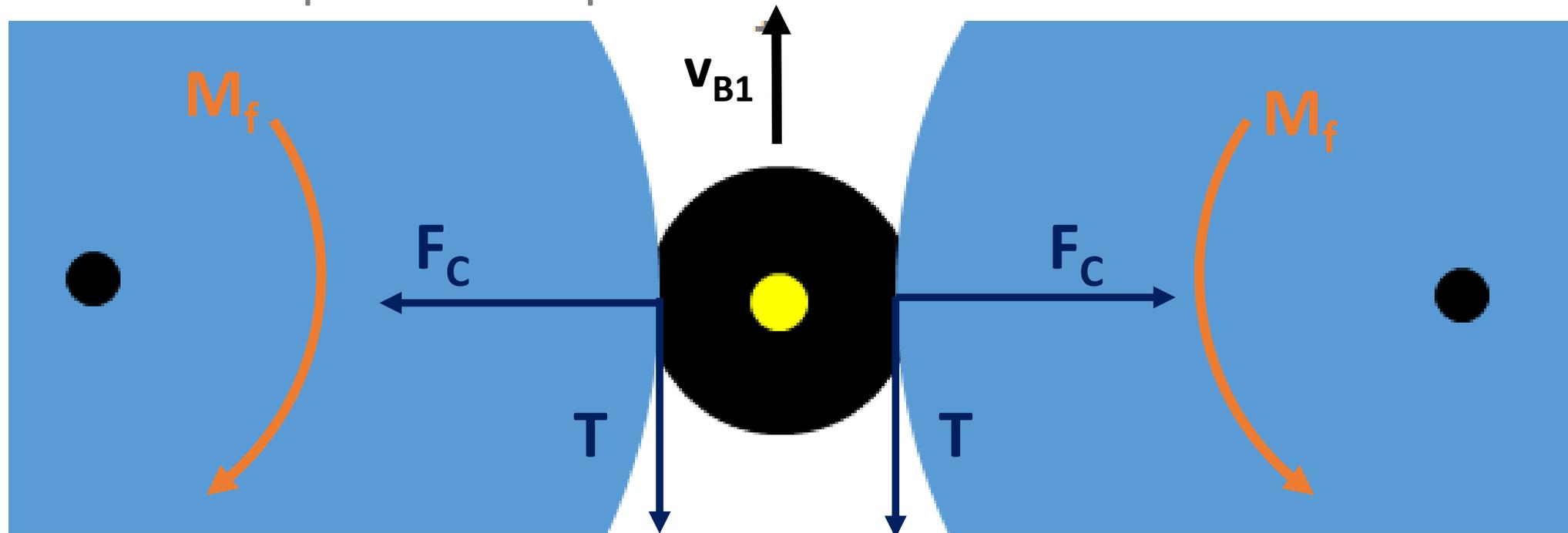
$T$  = Force tangentielle (résistance)

$\mu_0$  = Coefficient de frottement statique ou d'adhérence

$$T = \mu_0 \cdot F_C \quad (4)$$

- $t_1$  = étape transitoire

Application à notre problématique:



Les arbres des roues vont chacun reprendre une force radiale de  $F_c$ .

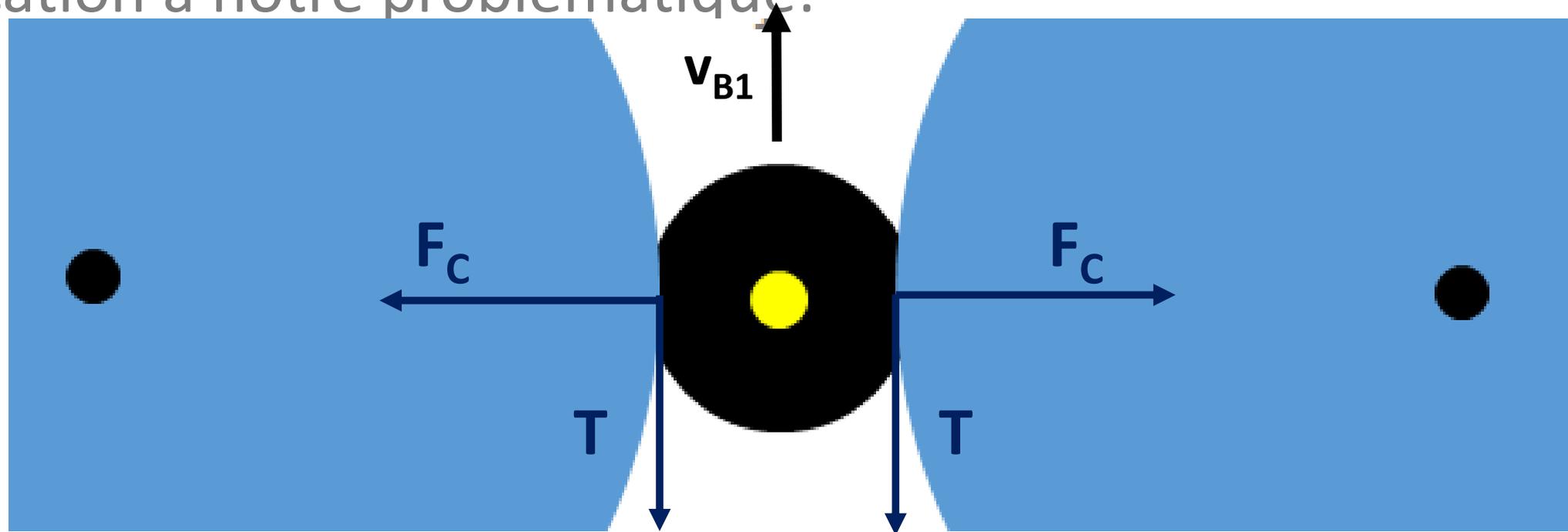
Les forces tangentielles ~~font~~ ~~un~~ ~~moment~~ ~~sur~~ ~~les~~ ~~arbres~~ ~~des~~ ~~roues~~ ~~s'opposant~~ ~~au~~ ~~mouvement~~ ~~de~~ ~~rotation~~ :

~~$$M_f = \mu_0 F_c \cdot R = \mu_0 F_c \cdot R \quad (5)$$~~

Ces moments « remontent » dans le mécanisme et rendent l'actionnement plus difficile.

- $t_1$  = étape transitoire

Application à notre problématique:



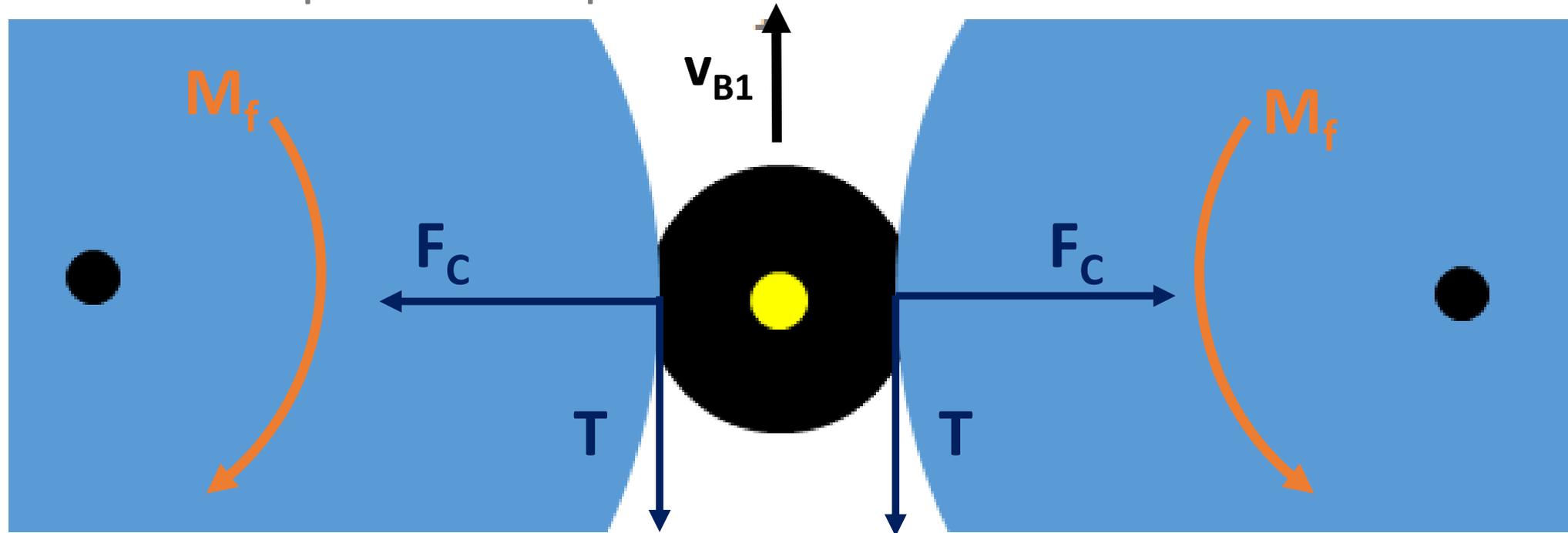
Les forces de frottement statique s'opposent au **glissement** de la balle.

Les roues roulent sans glisser par rapport à la balle qui se translate:

$$T < \mu_0 \cdot F_C \quad (4)$$

- $t_1$  = étape transitoire

Application à notre problématique:



Les arbres des roues vont chacun reprendre une force radiale de  $F_C$ .

La balle ne glisse pas au contact des 2 roues et se translate.

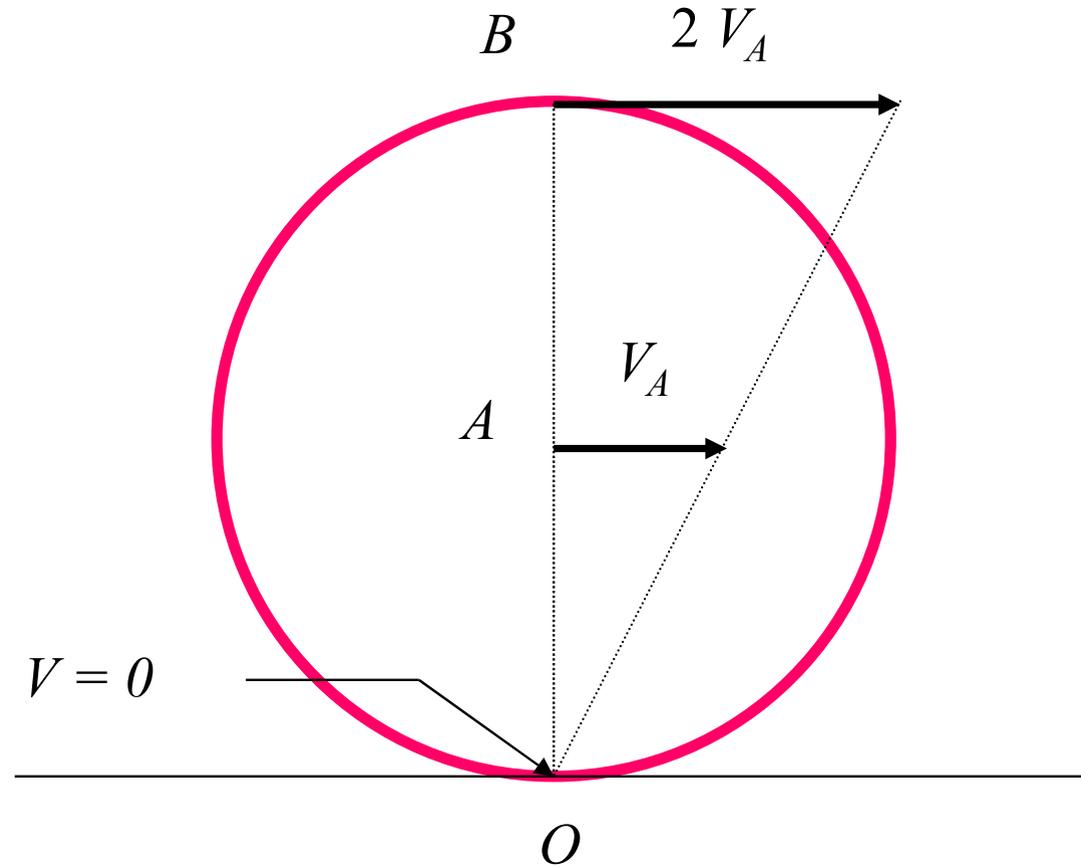
Les roues roulent sans glisser sur la balle sans se translater.

Conséquence: la balle se translate.

**Roulement sans glissement:**

Cinématique du roulement

Vitesse dans le cercle sans glissement



$O =$  Centre instantané de rotation (CIR)

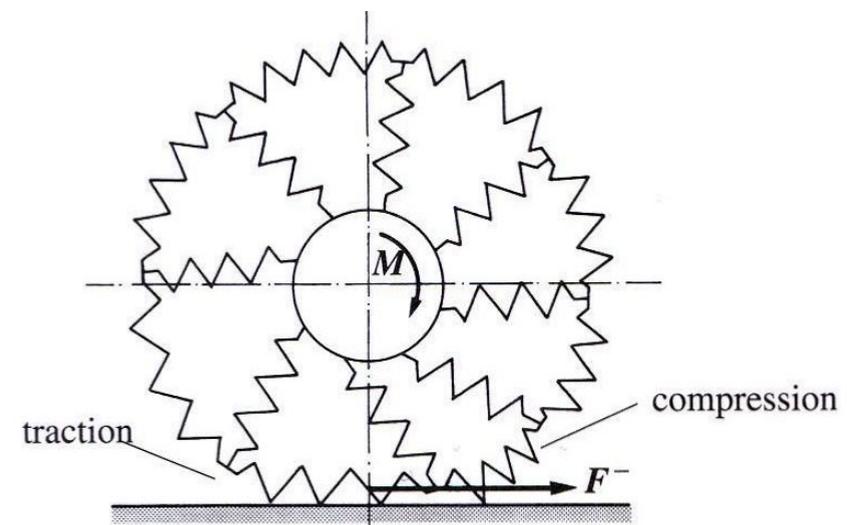
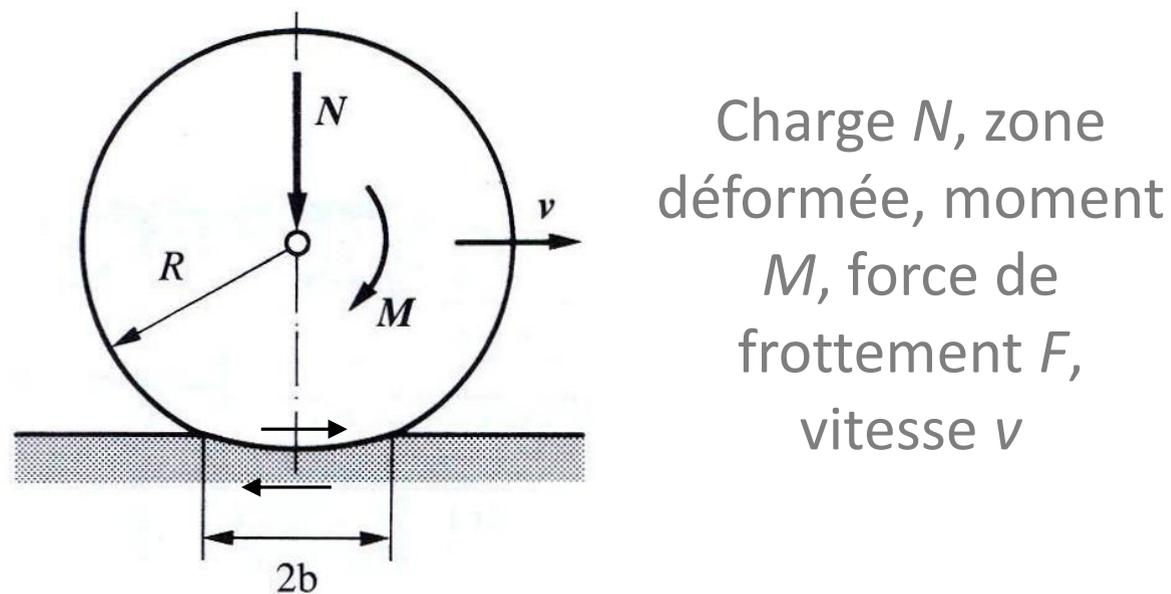
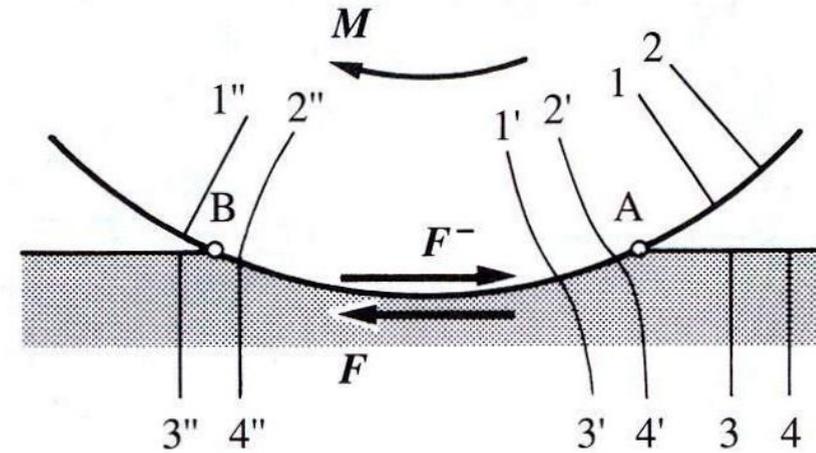
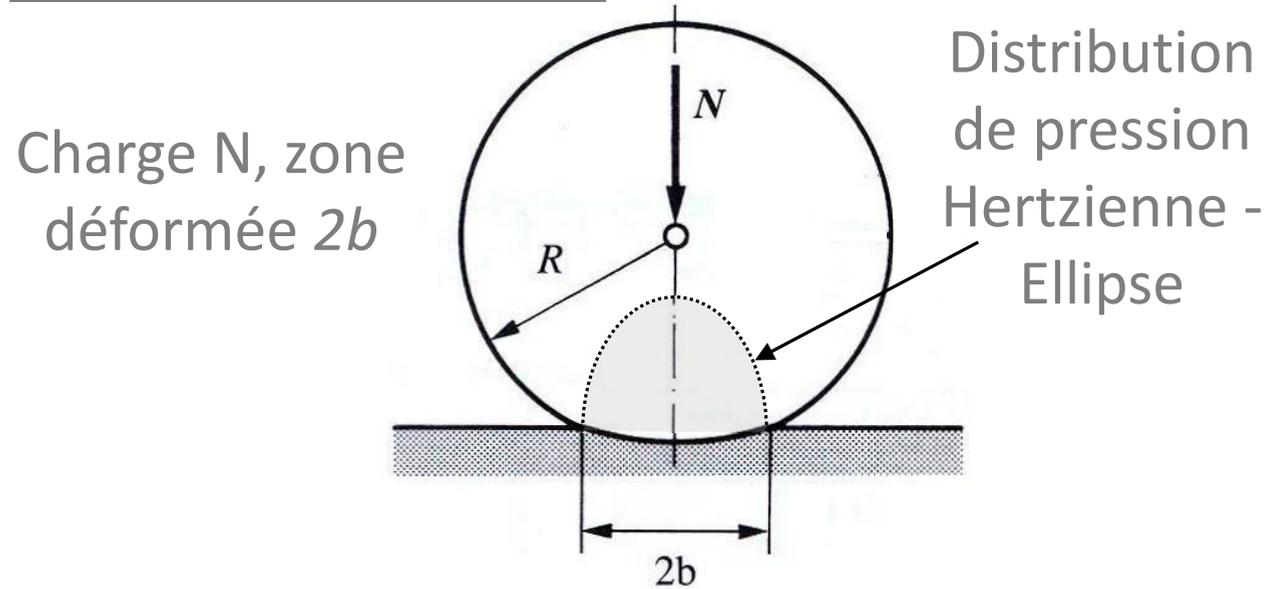
$$\overrightarrow{V}_{1/2}(O) = 0$$

$$\overrightarrow{V}_{1/2}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}$$

$$\overrightarrow{V}_{1/2}(B) = 2\overrightarrow{V}_{1/2}(A)$$

## Résistance au Roulement:

### Déformations: Contact Surfaccique



## Résistance au Roulement:

### Microglissement:

De A à C,

$\tau < \mu_0 p$  collage/adherence

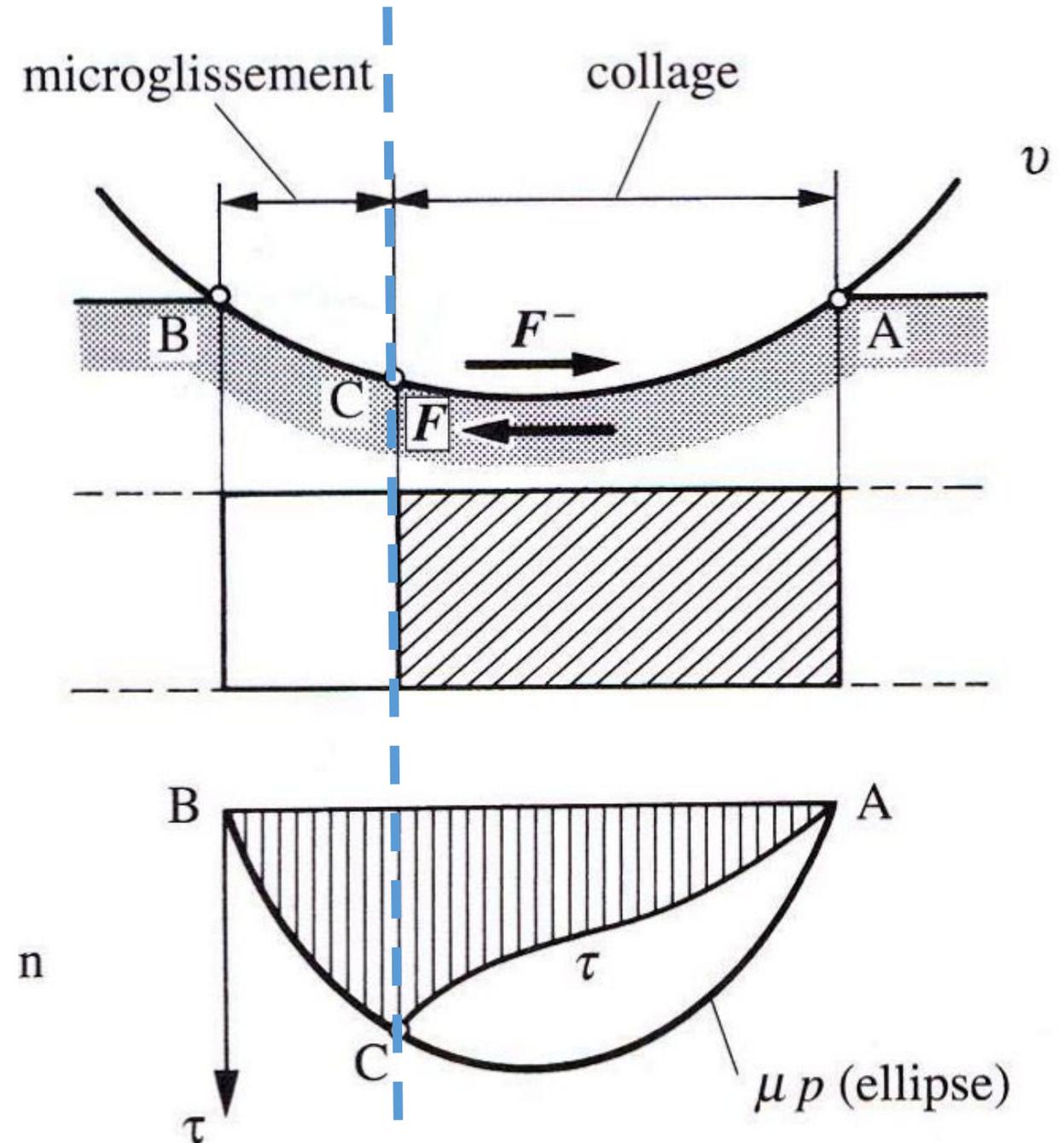
De C à B,

$\tau = \mu_0 p$  microglissement

avec  $p = N/A = T/(\mu_0 A)$

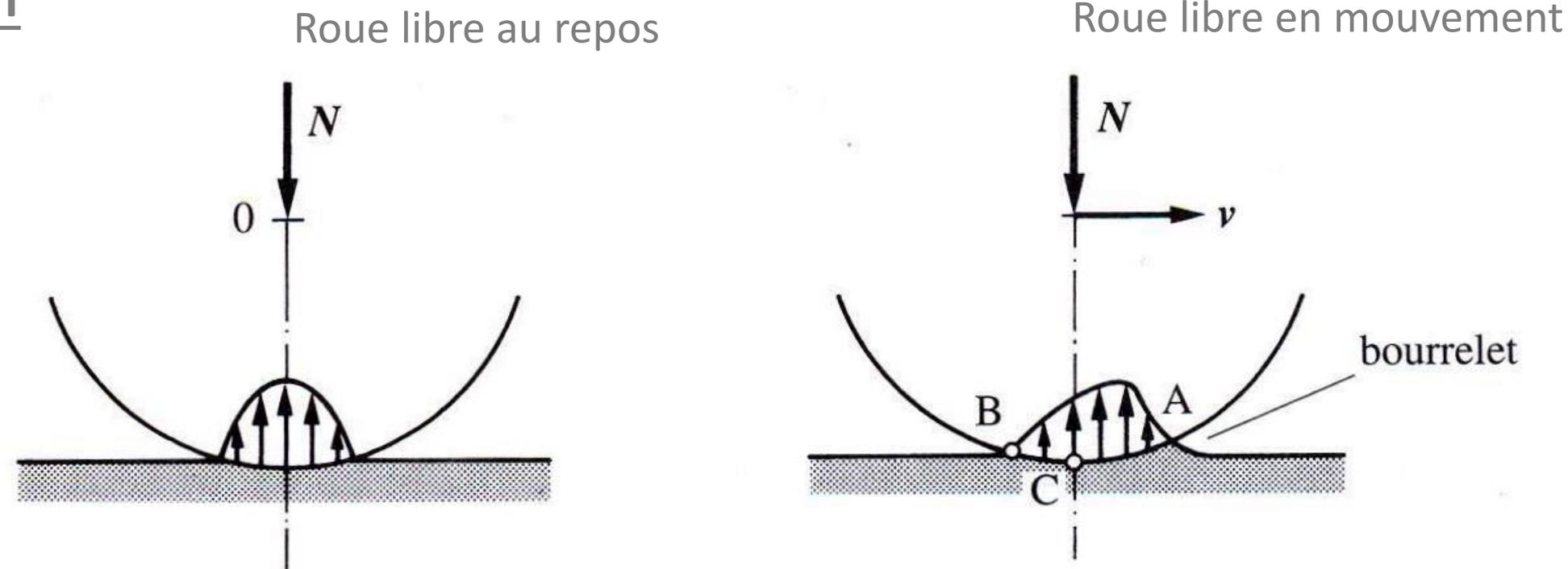
et  $\tau = \mu_0 p = T/A$

$A =$  aire de contact



## Résistance au Roulement:

### Dissipation



Mécanismes de résistance au roulement et dissipation:

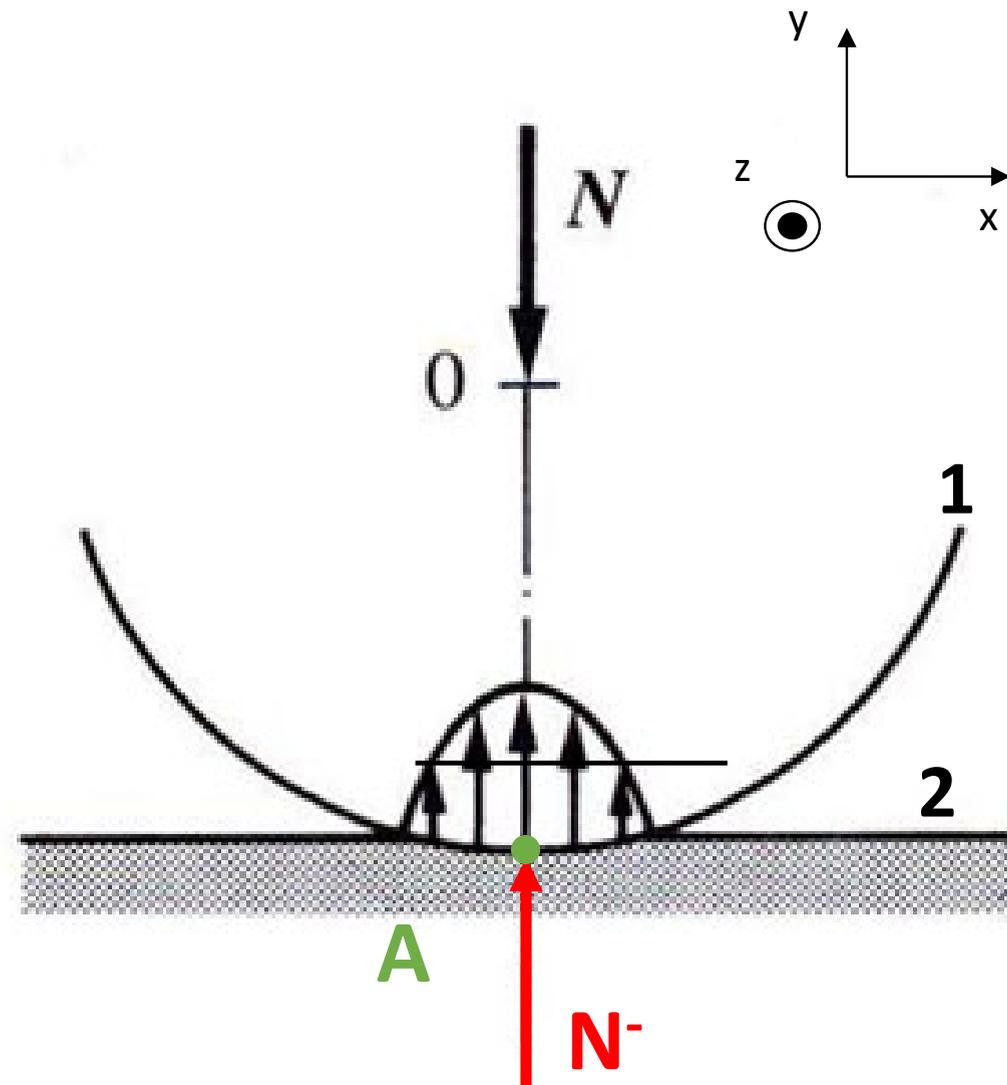
- Formation du bourrelet
- AC puis CB, compression et détente de la matière = échauffement

Dissipation d'énergie par hystérésis

- CB Microglissement au contact

## Résistance au Roulement:

A l'arrêt: 1 = roue  
2 = sol

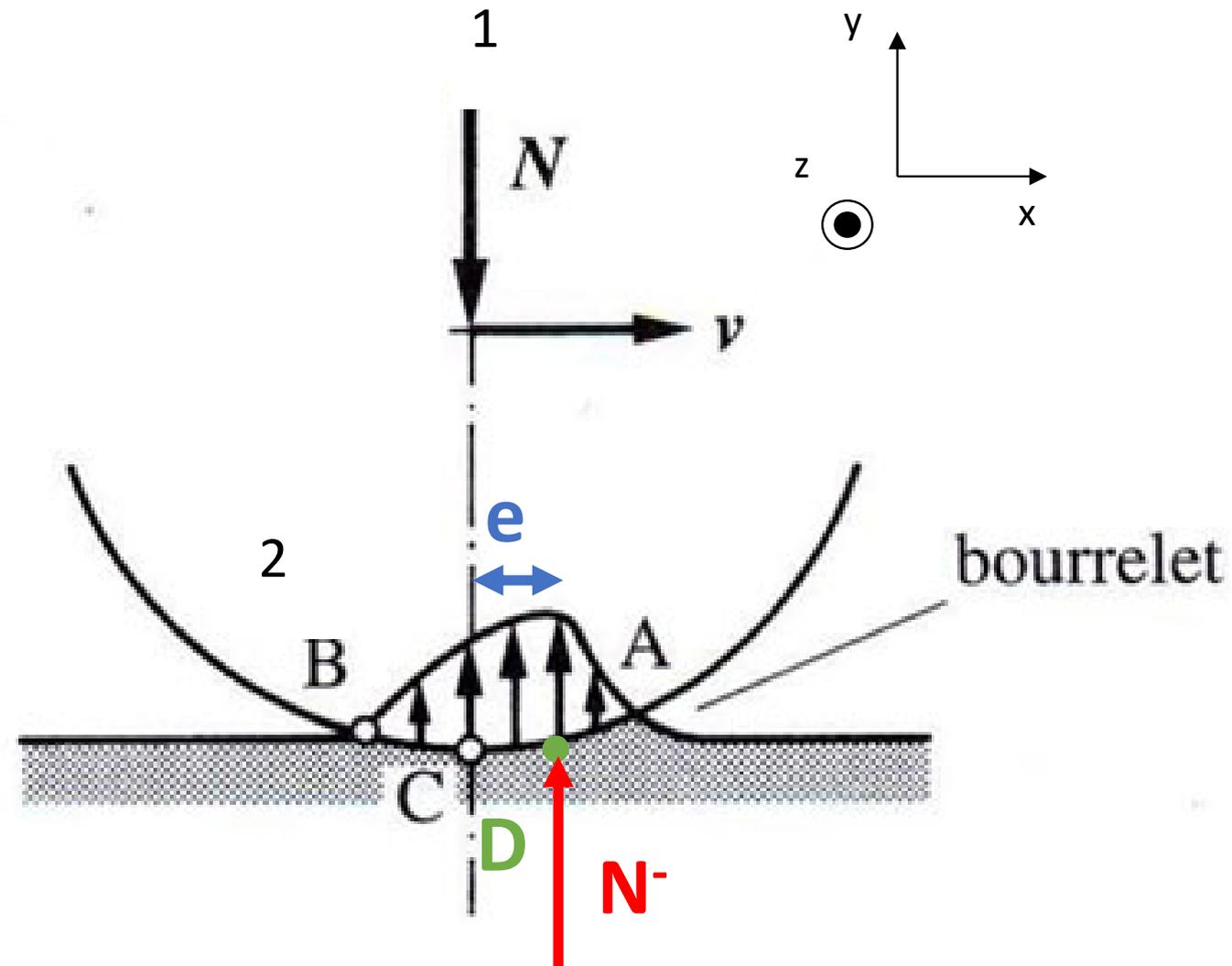


## Résistance au Roulement:

Amorce de roulement sans glissement:

1 = roue

2 = sol



Coefficient de roulement

Roue de wagon sur rail sec :  $e = 0,5$  à  $1,5$  mm

Roue de voiture sur route :  $e = 5$  à  $50$  mm

Rouleau bois sur bois :  $e = 0,5$  à  $1$  mm

Galet de pont roulant sur rail :  $e = 0,2$  à  $0,7$  mm

Pneu sur route « normale » :  $e = 2$  à  $5$  mm

Modélisation: Roue folle ou libre (non-motrice, non-freinée)

Rayon statique  $r < R$

Force motrice  $T$

Réactions du sol  $N^-$  et  $F^-$  dues au bourrelet

Paramètre de résistance au roulement  $e$

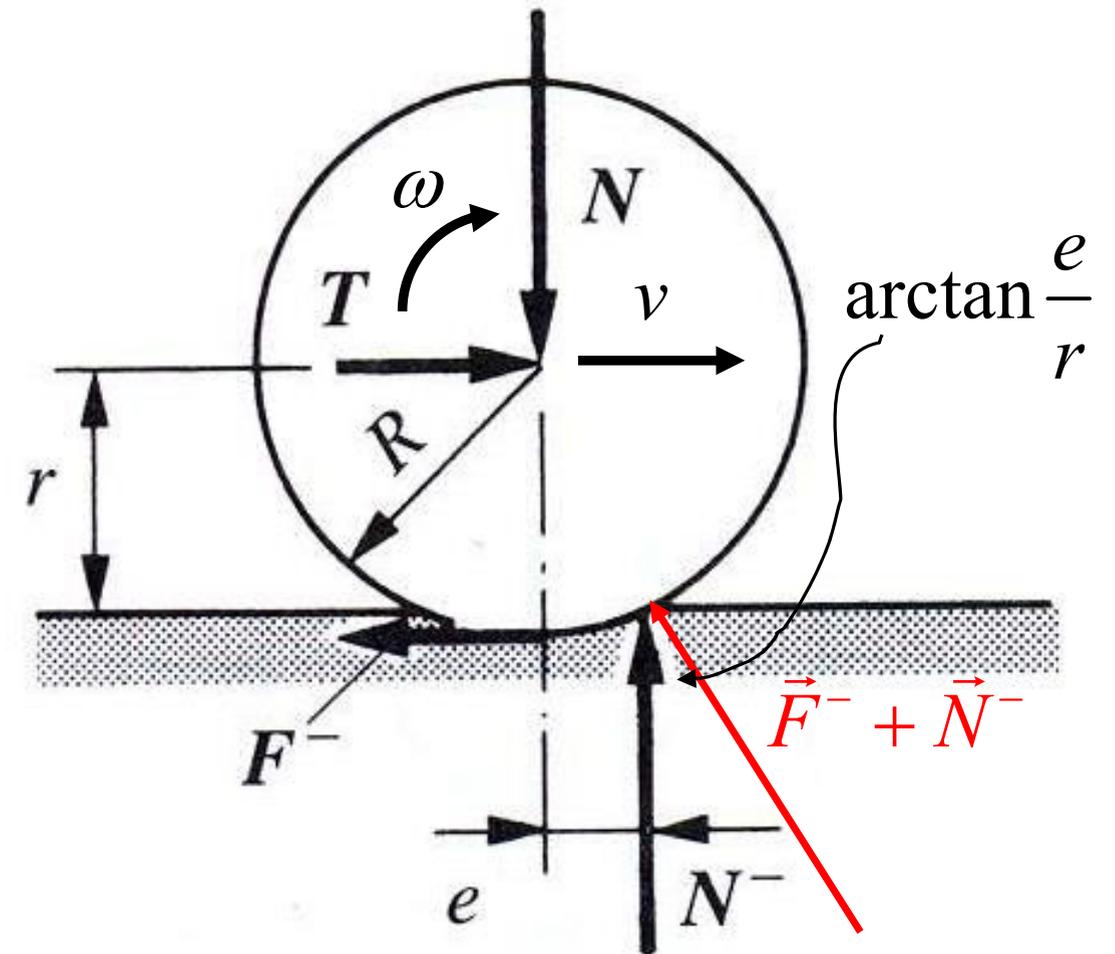
Equilibre statique ( $v = cst, \omega = cst$ ):

$$N = N^- \quad T = F^-$$

$$T \cdot r = N^- \cdot e \rightarrow e = \frac{r \cdot T}{N^-}$$

$$f = \frac{e}{r} = \frac{T}{N^-}$$

$$T = F^- = \frac{e}{r} \cdot N^-$$



Coefficient de Résistance au Roulement:  
Relation avec Coefficient de Frottement

$$f = C_{RR} = \frac{e}{r}$$

| Matériaux             | Coefficient de frottement |              |
|-----------------------|---------------------------|--------------|
| Acier/bronze graissé  | 0,10                      | (frottement) |
| Film hydrodynamique   | 0,05                      | (frottement) |
| Roulement à billes    | 0,001 à 0,002             | (roulement)  |
| Roulement à rouleaux  | 0,002                     | (roulement)  |
| Roulement à aiguilles | 0,005                     | (roulement)  |

Pertes par roulement < Pertes par frottement

Coefficient de Résistance au Roulement:

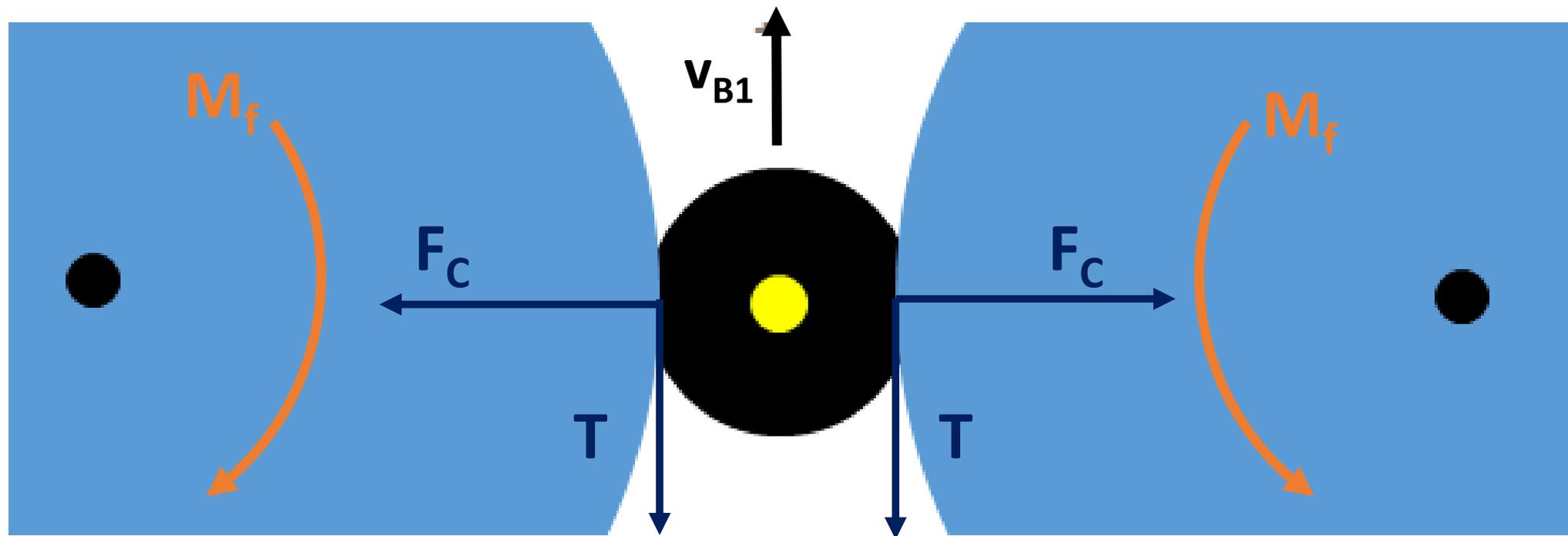
$$f = C_{RR} = \frac{e}{r}$$

| $C_{rr}$                             | $b$                   | Description   |
|--------------------------------------|-----------------------|---|
| 0.0003 to 0.0004 <sup>[16]</sup>     |                       | "Pure rolling resistance" Railroad steel wheel on steel rail                            |
| 0.0010 to 0.0024 <sup>[17][18]</sup> | 0.5 mm <sup>[2]</sup> | Railroad steel wheel on steel rail. Passenger rail car about 0.0020 <sup>[19]</sup>     |
| 0.001 to 0.0015 <sup>[20]</sup>      | 0.1 mm <sup>[2]</sup> | Hardened steel ball bearings on steel   |
| 0.0019 to 0.0065 <sup>[21]</sup>     |                       | Mine car cast iron wheels on steel rail   |
| 0.0022 to 0.005 <sup>[22]</sup>      |                       | Production bicycle tires at 120 psi (8.3 bar) and 50 km/h (31 mph), measured on rollers |
| 0.0025 <sup>[23]</sup>               |                       | Special Michelin solar car/eco-marathon tires   |
| 0.005                                |                       | Dirty tram rails (standard) with straights and curves <sup>[citation needed]</sup>      |
| 0.0045 to 0.008 <sup>[24]</sup>      |                       | Large truck (Semi) tires  |
| 0.0055 <sup>[23]</sup>               |                       | Typical BMX bicycle tires used for solar cars   |
| 0.0062 to 0.015 <sup>[25]</sup>      |                       | Car tire measurements   |
| 0.010 to 0.015 <sup>[26]</sup>       |                       | Ordinary car tires on concrete  |
| 0.0385 to 0.073 <sup>[27]</sup>      |                       | Stage coach (19th century) on dirt road. Soft snow on road for worst case.              |
| 0.3 <sup>[26]</sup>                  |                       | Ordinary car tires on sand  |

[http://en.wikipedia.org/wiki/Rolling\\_resistance](http://en.wikipedia.org/wiki/Rolling_resistance)

- $t_1$  = étape transitoire

Application à notre problématique:



La balle ne glisse pas au contact des 2 roues. Les forces tangentielles de résistance au roulement créent un moment sur les arbres des roues s'opposant au mouvement de rotation:

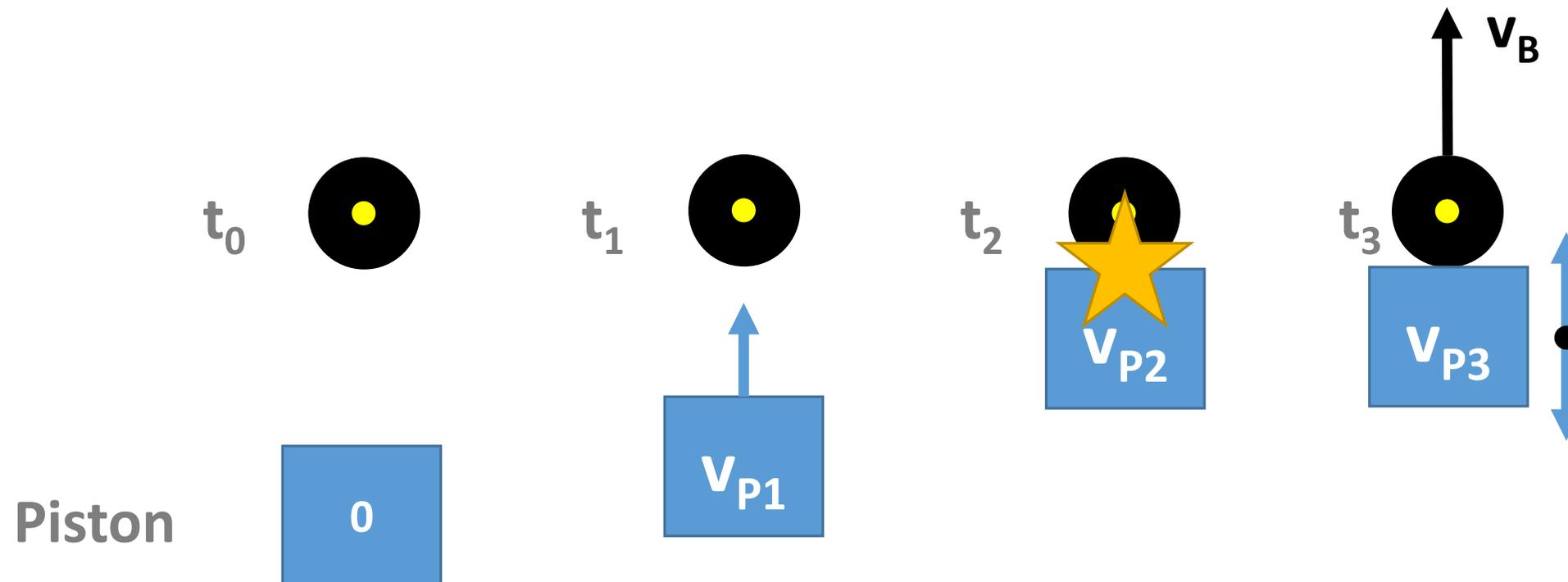
$$M_f = T \cdot R = C_{RR} \cdot F_C \cdot R \quad (5) \quad C_{RR} \ll \mu_0$$

Ces moments « remontent » dans le mécanisme et rendent l'actionnement plus difficile.

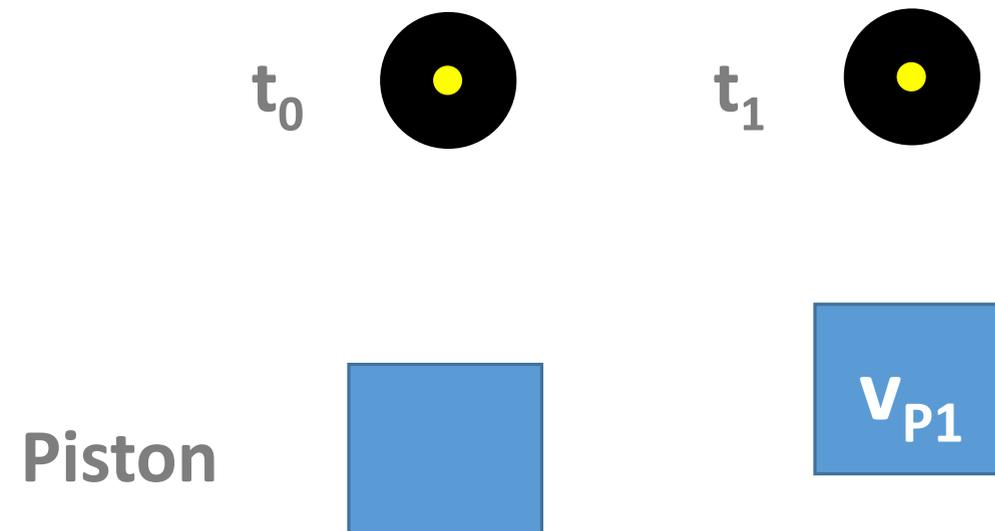
- La balle est au repos et le piston la percute.

4 étapes à considérer:

- $t_0$  = la balle est au repos, le piston est chargé et au repos
- $t_1$  = la balle est au repos, le piston est lâché et accélère.
- $t_2$  = le piston frappe la balle: impact.
- $t_3$  = la balle est lancée, le piston s'arrête.



- La balle est au repos et un piston la percute.
- $t_0$  = la balle est au repos, le piston est chargé et au repos  
Mécanisme de chargement du piston à déterminer.
- $t_1$  = la balle est au repos, le piston est lâché et accélère.



- La balle est au repos et le piston la percute.
- $t_2$  = le piston transfère de sa quantité de mouvement à la balle.

$$p_{P2} = m_P \cdot v_{P2}$$

La balle oppose un coefficient de restitution au transfert d'une partie de la quantité de mouvement du piston à la balle.



- **Détermination du Coefficient de Restitution:**

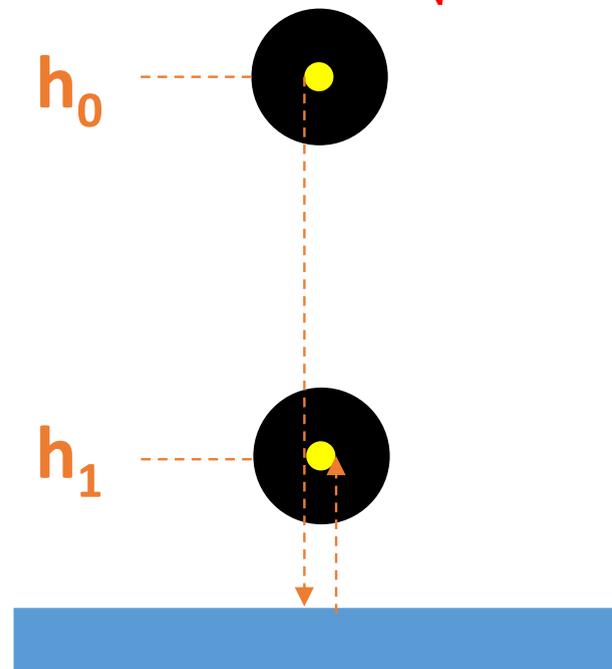
Essai de chute libre de la balle et observation du rebond.

Choc partiellement inélastique:

$$h_1 = 1/8 \cdot h_0$$

$v_0, v_1$  = vitesse de la balle avant/après le choc

Coefficient de restitution :  $C_R = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \mathbf{0.35} \quad (6)$



- La balle est au repos et le piston la percute.
- $t_2$  = le piston transfère de sa quantité de mouvement à la balle.

Choc partiellement inélastique.

$$p_{P2} = m_P \cdot v_{P2} = p_B + p_{P3} = m_B \cdot v_B + m_P \cdot v_{P3} \quad (7)$$

Définition du Coefficient de Restitution pour un choc partiellement inélastique entre 2 solides:

$$C_R = (v_B - v_{P3}) / (v_{P2} - v_{B0}) = (v_B - v_{P3}) / v_{P2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{selon (6)}$$

$$v_{P3} = v_B - C_R \cdot v_{P2} \quad (8)$$

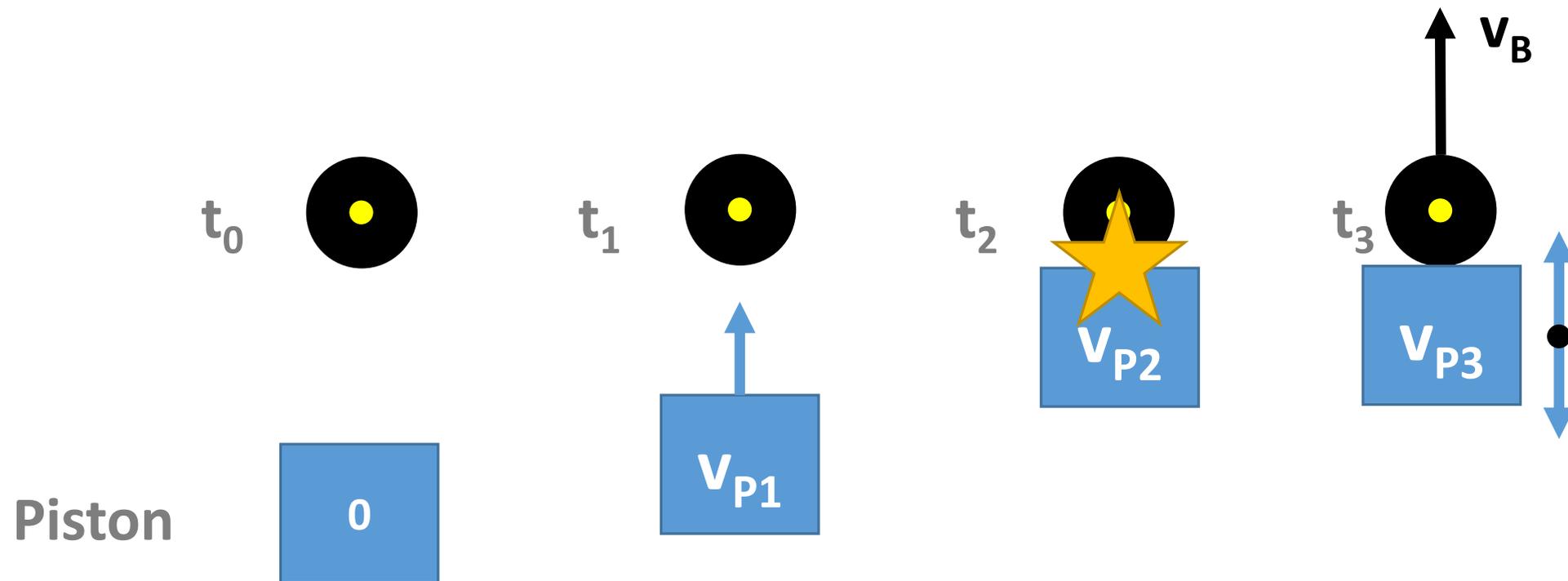
$$(8) \text{ Dans (7):} \quad v_B = (m_P + C_R \cdot m_P) \cdot v_{P2} / (m_P + m_B) \quad (9)$$

$$(9) \text{ dans (8):} \quad v_{P3} = (m_P - C_R \cdot m_B) \cdot v_{P2} / (m_P + m_B) \quad (10)$$

- La balle est au repos et un piston la percute.

Avec (9), il faut maintenant déterminer

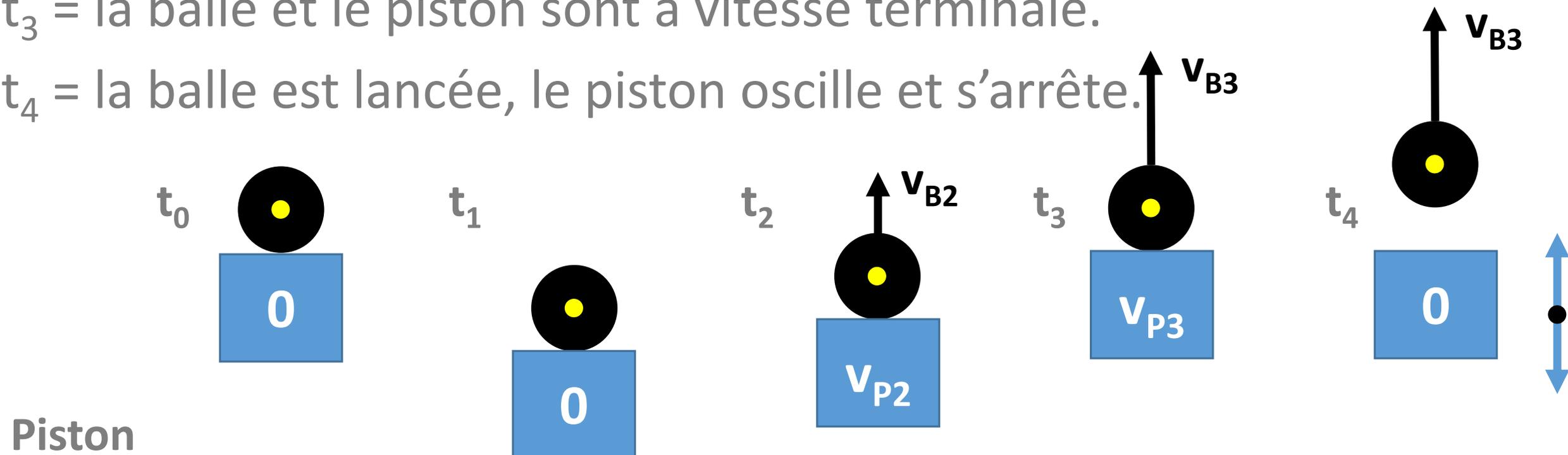
$m_p$  et  $v_{p2}$  tels que  $v_B \in [22.2;36.1]$  m/s



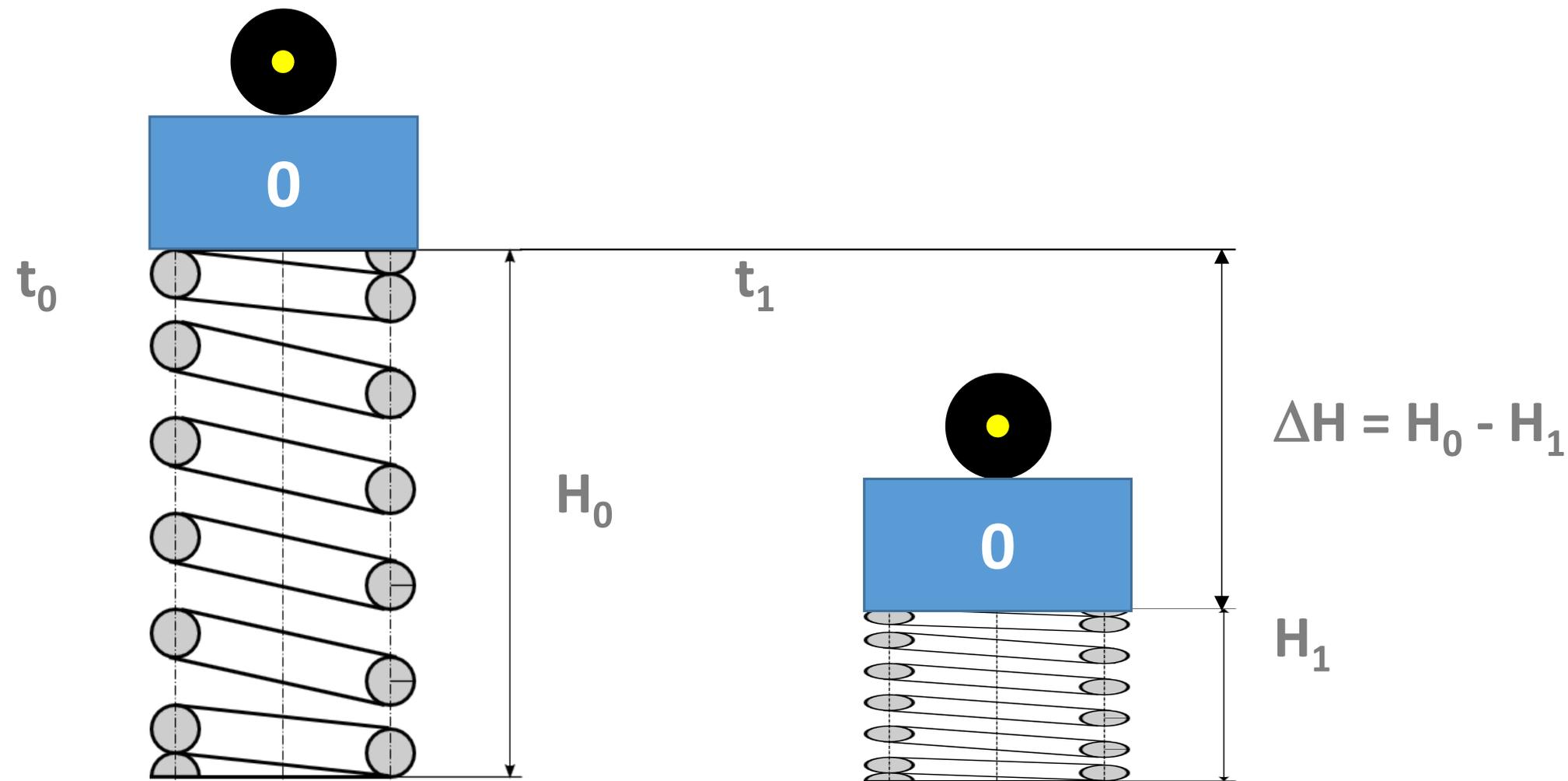
- La balle est propulsée par un piston, sans choc.

5 étapes à considérer:

- $t_0$  = la balle est au repos, le piston est déchargé et au repos.
- $t_1$  = la balle et le piston sont au repos, le piston et la balle ont été abaissés, i.e. le piston est chargé.
- $t_2$  = le piston est lâché, accélère et accompagne la balle.
- $t_3$  = la balle et le piston sont à vitesse terminale.
- $t_4$  = la balle est lancée, le piston oscille et s'arrête.



- La balle est propulsée par un piston, sans choc.
- $t_0$  = la balle est au repos, le piston est déchargé et au repos.
- $t_1$  = la balle et le piston sont au repos, le piston et la balle ont été abaissés, i.e. le piston est chargé.

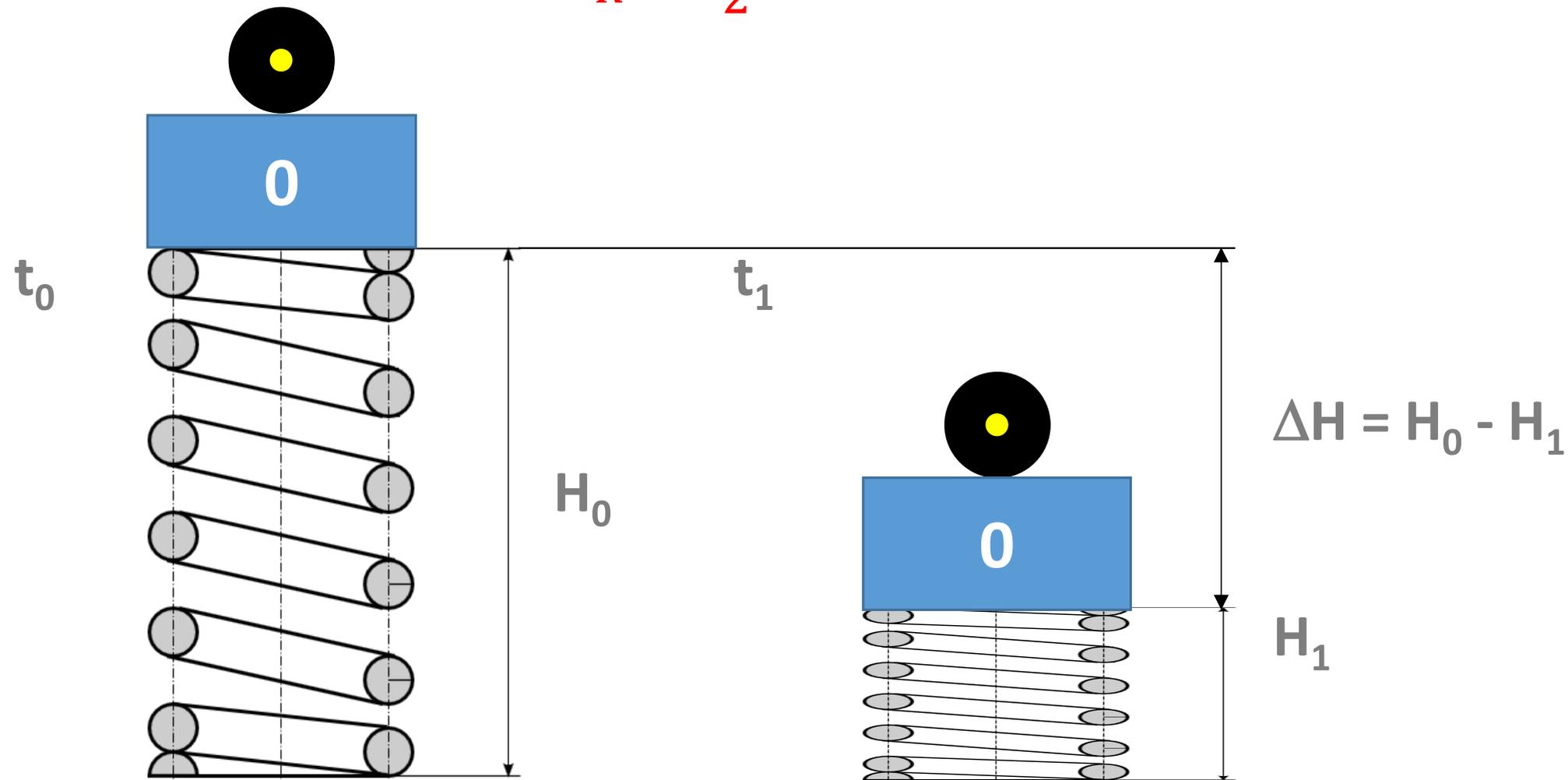


- La balle est propulsée par un piston, sans choc.

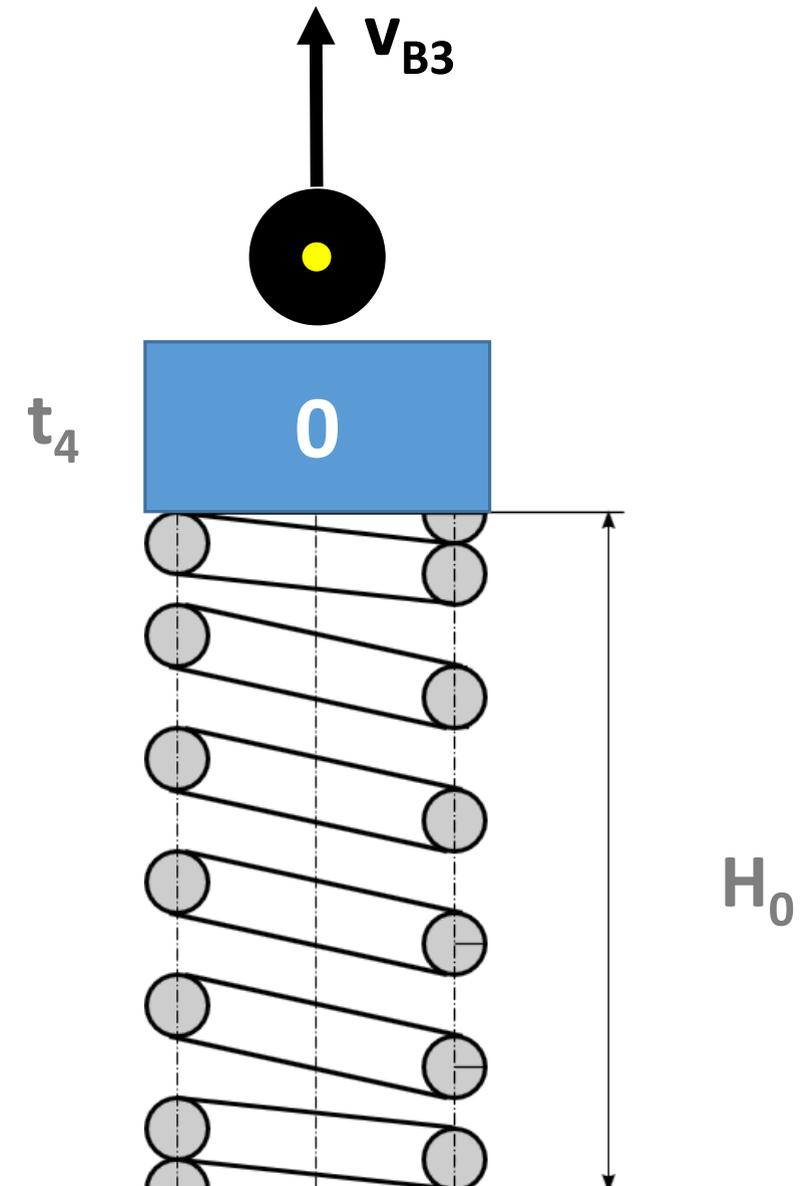
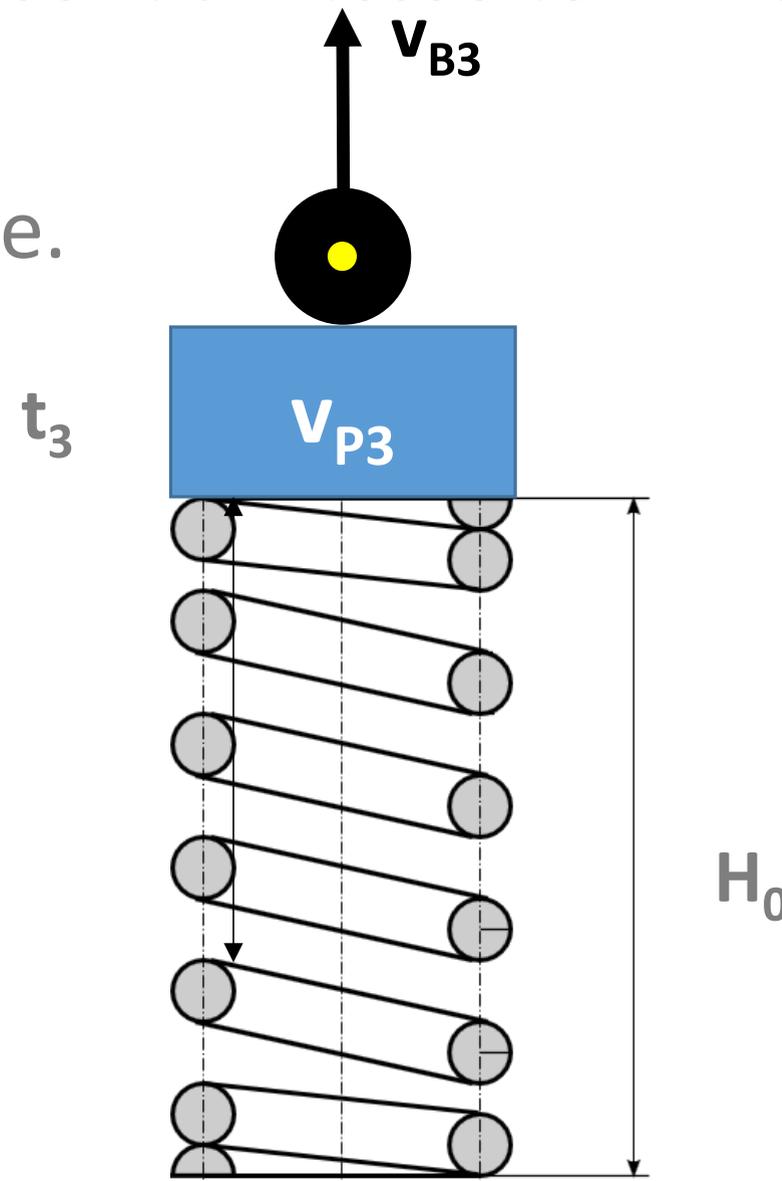
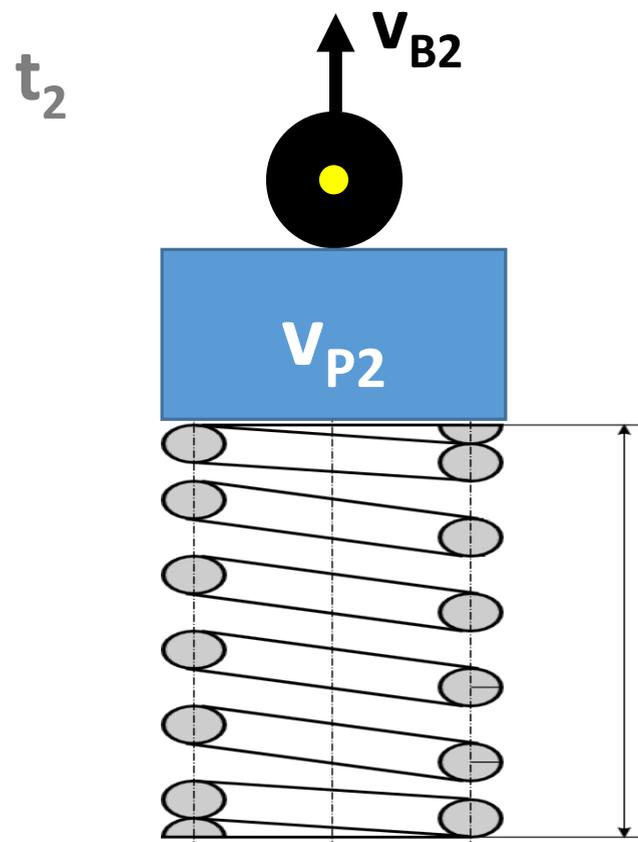
Si le chargement est fait par ressort,

énergie emmagasinée = énergie potentielle élastique du ressort:

$$E_{PR} = \frac{1}{2} K \cdot \Delta H^2 \quad (11)$$

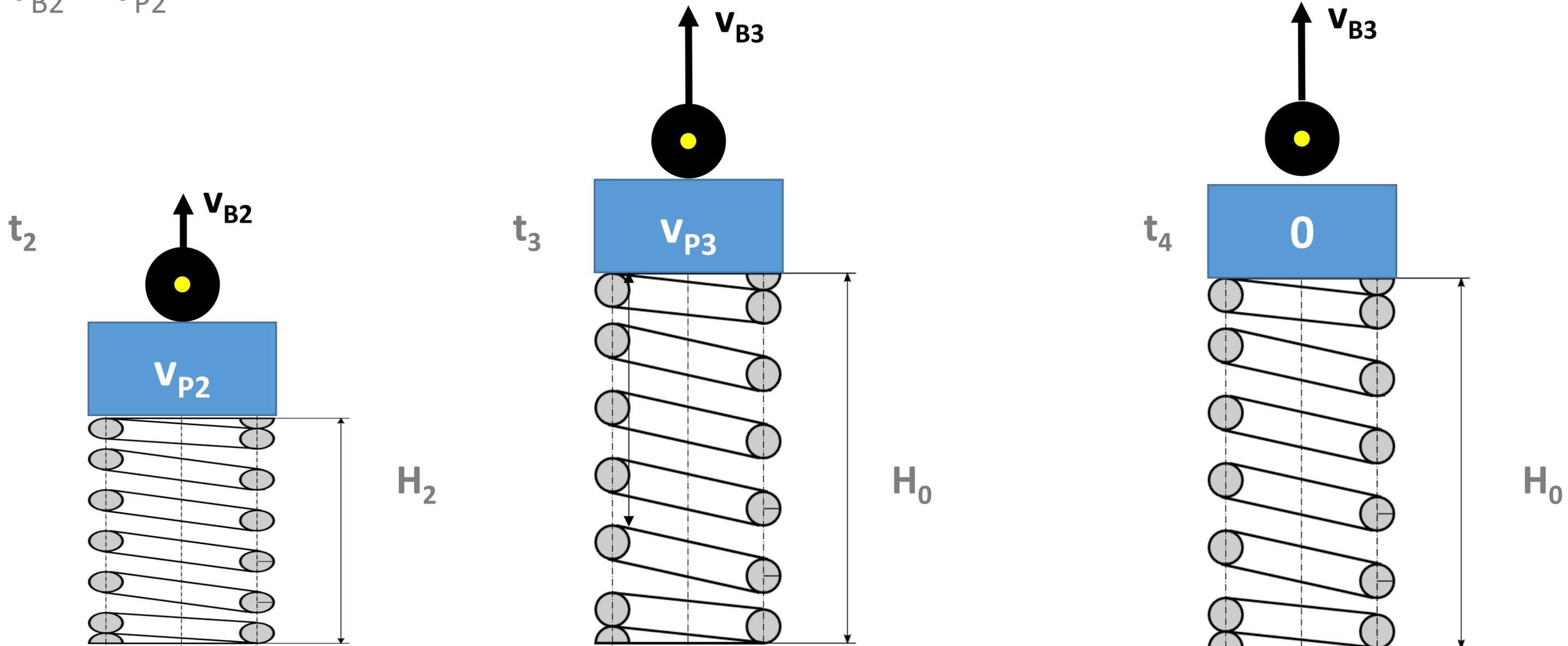


- La balle est propulsée par un piston, sans choc.
- $t_2$  = le piston est lâché, accélère et accompagne la balle.
- $t_3$  = la balle et le piston sont à vitesse terminale.
- $t_4$  = la balle est lancée, le piston oscille et s'arrête.



- La balle est propulsée par un piston sans choc.
- $t_2$  = le piston est lâché, accélère et accompagne la balle.

$$V_{B2} = V_{P2}$$



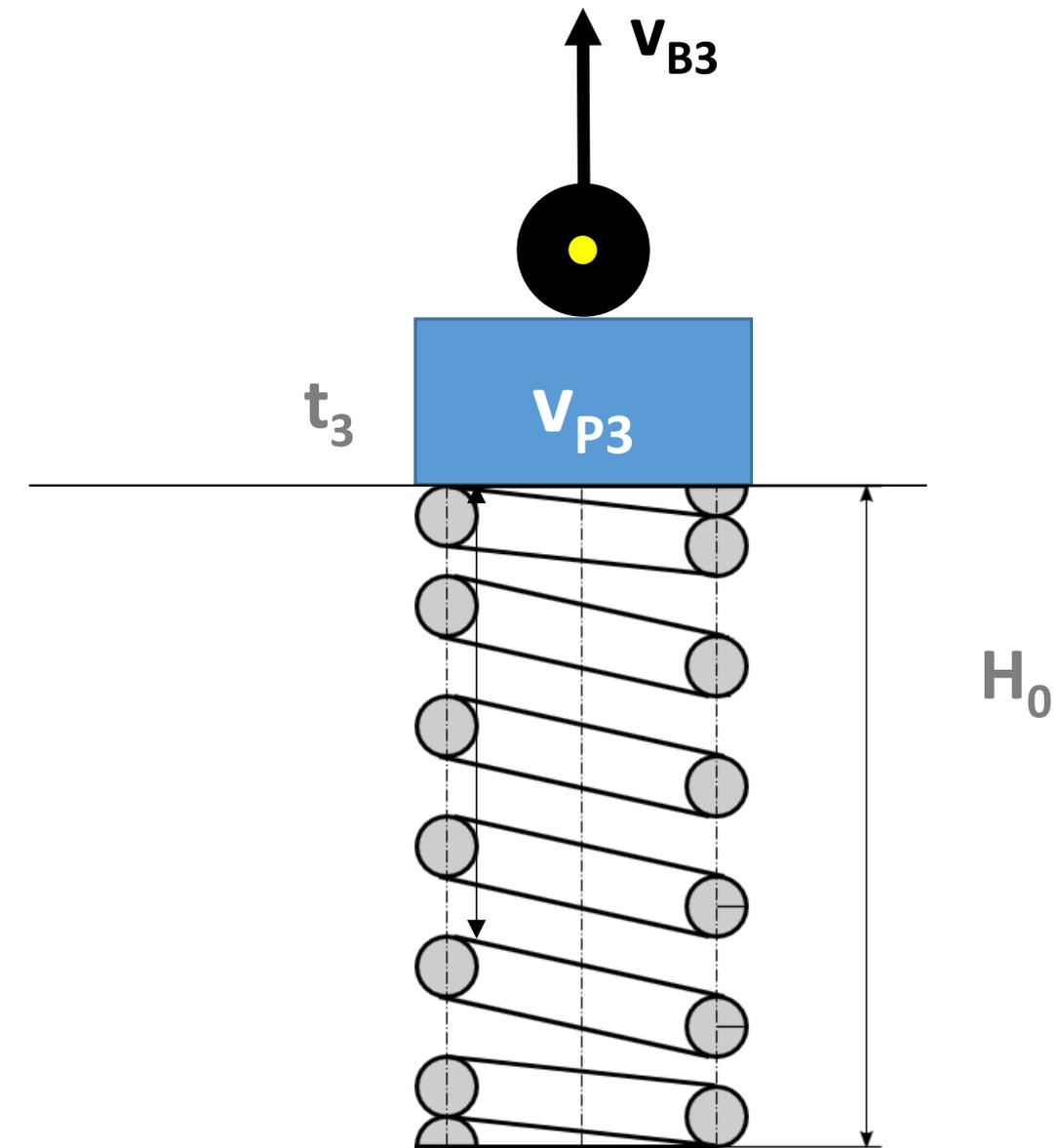
- La balle est propulsée par un piston, sans choc.
- $t_3$  = la balle et le piston sont à vitesse terminale.

$$v_{B3} = v_{P3}$$

Energie cinétique du système (piston+balle):

$$E_{C3} = \frac{1}{2} m_P \cdot v_{P3}^2 + \frac{1}{2} m_B \cdot v_{B3}^2$$

$$E_{C3} = \frac{1}{2} (m_P + m_B) \cdot v_{B3}^2 \quad (12)$$



- La balle est propulsée par un piston sans choc.
- $t_4$  = La balle est lancée avec une énergie cinétique:

$$E_{B3} = \frac{1}{2} m_B \cdot v_{B3}^2$$

Le piston oscille, épuise l'énergie cinétique du piston:

$$E_{P3} = \frac{1}{2} m_P \cdot v_{B3}^2$$

et s'arrête à sa position initiale avec le ressort à  $H_0$ .

On veut minimiser la masse du piston pour transformer un maximum d'énergie potentielle du ressort en énergie cinétique de la balle.

